読んで理解する経済数学
ウェブ付録

多鹿智哉

更新日:2026 年 4 月 23 日

目次

はじめに

これは「読んで理解する 経済数学」（新世社刊）のウェブ付録です．主な内容は練習問題とその解答例です．書籍本文にある練習問題には解答例をつけていますが，その他の問題については講義などで使いやすいように半分程度の問題には解答をつけていません．以下は注意事項です．

- 必ずしも全ての問題を解けるようになる必要はありません．下記の注意点を参考にして，自分のレベルに合った問題を選んでください．
  - 問題番号の右側には pt がついています．pt が高い問題は難しい問題か手間がかかる問題ですが pt が高いことは必ずしも重要な問題であることを意味しません．
  - ✫がついている問題は本書を超えた発展的な内容を含む問題です．
- わからない問題は解答例を見ても良いです．理解できるようになることが大事です．
  - 解答例を見て，まずどのような方針で問題を解いているかを確認してください[*1]．
  - 方針が理解できるのであれば，解答例を一言一句理解しようとはせずに，一旦解答例を閉じ，その方針で再度問題に挑戦してみてください．自分で解答を論理的に組み立てられるようになれることが大事です．
  - 方針すらよくわからない場合，他の人に聞いてみましょう．あなたが大学生であれば，まずはその大学の教員を頼ってください．あるいはよくできる同級生でも構いません．
  - 最終手段は著者に聞くことですが，ありとあらゆる質問に答えるわけにはいきませんのであくまで最終手段にしてください．
  - 質問をいただいた場合は質問内容と回答をサポートページ内で（もちろん質問者の名前は伏せて）公開することがあります．
- 問題を解くにあたって，一発で解こうとは思わないことです[*2]．解答例も試行錯誤の上に出来上がっています．「この方法ではうまく解けない」みたいな失敗したやり方は山ほどあります．失敗したやり方は出回らないので意識はされないかもしれませんが，ほとんどの人は最初の方針では失敗することの方が多いと思います[*3]．ですので一発で解けなくても気にする必要はありません．このやり方ではどうだろう，と数多くの方針を試してみて，最終的にひとつうまくいく方法

[*1] 自分のやり方と違う場合はそれでも構いません．自分にとって最もやりやすいやり方が一番です（間違いでなければ！）．

[*2] もちろん一発でできればそれに越したことはありませんが．

[*3] 解答として出回るのは綺麗に整理されたものです．場合分けなどは最初から「こうするとうまくいく」とわかっていたように書かれることが多いですが，実際には色々考えて，綺麗に見えるように後から清書されたものがほとんどです．ですので最初から「こんな解答思いつかない！」と諦めてはいけません．

を見つけ出せるようになればそれで良いのです．

- 解答例はあくまで解答の例であり，唯一の正解ではありません．解法は他にもあります．ご自身の答案と解答例が一致していなくても大丈夫です．ご自身の答案が間違っていないかどうかはお近くの数学者か経済学者，あるいは数学教師にお尋ねください．
- 細かい計算や，ややこしい計算には電卓や計算ソフトウェアを用いて構いません．計算ソフトウェアには Wolfram|Alpha や Excel などの表計算ソフトをおすすめします．使い方は検索すれば色々出てきます．本書のサポートページでも簡単な使い方を紹介しています．

第 I 部

問題編

第 1 章

基礎の計算

問題 1 3pt 解答例あり

1. $a + \dfrac{a \times a}{b}$ を通分して計算しなさい．（ヒント：$a = a \times \frac{b}{b}$ と書けますね！）
2. $(a + b) \times (a + b)$ を展開しなさい．
3. $(a + b) \times (a - b)$ を展開しなさい．

問題 2 3pt

1. $(a + c)b = cz + 3x$ を左辺が a だけになるように変形しなさい．その際，どの変形ルールを用いたかを細かく明記しなさい．
2. $\frac{\frac{c}{a+b}}{\frac{a+c}{d}}$ の分母分子から小さい分数がなくなるように変形しなさい．

問題 3 4pt 解答例あり

カッコを使わずに分数を書くと色々な答えが考えられ，あいまいになりやすい．$a = 7$ のとき，$1 + 5/2a + 3$ という表記から考えられる答えをなるべくたくさん書き，それぞれその答えになるように分かりやすい表記に改めなさい．

問題 4 3pt

1. $\dfrac{1}{1 + \frac{1+x}{x}}$ の分母分子から小さい分数がなくなるように変形しなさい．
2. $(a + b) \times (a + c)$ を展開しなさい．

問題 5 7pt 解答例あり

数学ではオリジナルの演算を好きな記号を使って定めることができる．今，すべての実数 a, b について $a \heartsuit b = a^b$ という形で演算 $\heartsuit$ を定める．この演算が結合法則と交換法則を満たさないことを証明したい．そのために具体的な数字で $\heartsuit$ を計算して実際に成り立っていないことを確認しなさい（満たさない，ということはこれで証明したことになる）．

（ヒント：$a=2$，$b=1$ などを代入して，$a \heartsuit b = b \heartsuit a$ や $a \heartsuit (b \heartsuit c) = (a \heartsuit b) \heartsuit c$ が成り立つかを確認してみましょう．なお，カッコがついている方を先に計算する．）

問題 6 7pt

すべての実数 a, b について $a \heartsuit b = b - a + |a - b|$ という演算を定める．この演算が結合法則と交換法則を満たさないことを証明しなさい．
ただし $|x|$ は x の絶対値で，$x \geqq 0$ のときは $|x| = x$ であるが，$x < 0$ のときは $|x| = -x$ である．

問題 7 7pt

すべての実数 a, b について $a \heartsuit b = |a - b|$ という演算を定める．この演算は交換法則を満たすが結合法則を満たさないことを証明しなさい．

問題 8 7pt 解答例あり

$-1 \times a = -a$ であることを示しなさい．

問題 9 7pt 解答例あり

$a \times (-b) = -a \times b$ であることを示しなさい．

問題 10 7pt 解答例あり

$b \neq 0, d \neq 0,$ について $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$ であることを示しなさい．

問題 11 3pt 解答例あり

次の証明のどこが間違いか指摘しなさい．

> $1 = 2$ を証明する．まず $b = a$ とする．これに両辺 a をかけて $ab = a^2$ である．両辺から b^2 を引くと $ab - b^2 = a^2 - b^2$ である．因数分解をすると $(a-b)b = (a-b)(a+b)$ である．ここで両辺を $(a-b)$ で割ると $b = a + b$．さらに $a = b$ であることから $b = b + b$ となり，まとめると $b = 2b$ である．両辺を b で割れば $1 = 2$．

第 2 章

論理と集合

問題 12 3pt

命題と命題でないものをそれぞれ具体例をふたつづつ挙げよ．

問題 13 5pt 解答例あり

$((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$ は A, B, C の真偽すべての組み合わせについて真である．（これは三段論法と呼ばれる）． このことを以下の真理表を埋めることで示しなさい．

A	B	C	$A \to B$	$B \to C$	$(A \to B) \wedge (B \to C)$	$A \to C$	$((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$
T	T	T					
T	T	F					
T	F	T					
T	F	F					
F	T	T					
F	T	F					
F	F	T					
F	F	F					

問題 14 5pt

$(\neg(\neg A \wedge B)) \to (B \to A)$ は A, B の真偽すべての組み合わせについて真である． このことを以下の真理表を埋めることで示しなさい．

A	B	$\neg A$	$\neg A \wedge B$	$(\neg(\neg A \wedge B))$	$B \to A$	$(\neg(\neg A \wedge B)) \to (B \to A)$
T	T					
T	F					
F	T					
F	F					

問題 15 5pt 解答例あり

以下の表を用いて $(\neg(\neg p \wedge q)) \vee q$ の真理値を計算しなさい．

p	q	$\neg p$	$(\neg p \wedge q)$	$(\neg(\neg p \wedge q))$	$(\neg(\neg p \wedge q)) \vee q$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

問題 16 12pt

真理表を用いて以下の問いに答えなさい

1. $\neg(\neg p \wedge \neg q)$ の真理値を計算しなさい.
2. $\neg(\neg p \vee \neg q)$ の真理値を計算しなさい.
3. $p \wedge \neg p$ が矛盾命題であることを示しなさい.
4. $p \rightarrow q$ は $\neg p \vee q$ と同値であることを示しなさい.
5. 条件文 $p \rightarrow q$ に対して，$q \rightarrow p$ を「$p \rightarrow q$ の逆」という．条件文 $p \rightarrow q$ とその逆は同値ではないことを示しなさい.
6. 条件文 $p \rightarrow q$ に対して，$\neg p \rightarrow \neg q$ を「$p \rightarrow q$ の裏」という．条件文 $p \rightarrow q$ とその裏は同値ではないことを示しなさい.

問題 17 6pt

命題代数の法則のうち，補元律以外の 3 つを選び，真理表によりその同値性を証明しなさい.

問題 18 4pt 解答例あり

命題代数の法則を用いて以下を示しなさい.

1. $p \rightarrow q$ は $\neg p \vee q$ と同値であることを用いて $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$ を示しなさい.
2. 条件文 $p \rightarrow q$ に対して，$q \rightarrow p$ を「$p \rightarrow q$ の逆」，$\neg p \rightarrow \neg q$ を「$p \rightarrow q$ の裏」という．$p \rightarrow q$ の逆と裏が論理同値であることを示しなさい.

問題 19 4pt

1. $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ であることを示しなさい.
2. $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ であることを示しなさい.

問題 20 4pt

新たな論理演算子 xor を $p \text{ xor } q \equiv (p \vee q) \wedge (\neg(p \wedge q))$ と定義する．このとき $p \text{ xor } q$ の真理表を書きなさい.

問題 21 4pt 解答例あり

1. $A_1 = \{x \in \mathbb{N} \colon x^2 = 4\}$ を外延的記法で表記しなさい.
2. $\mathbb{R}_+$ を内包的記法で表記しなさい（普遍集合を $\mathbb{R}$ としてよい）.

問題 22 4pt

1. $A_2 = \{x \in \mathbb{Z} \colon x^2 = 4\}$ を外延的記法で表記しなさい.
2. $\mathbb{R}_{++}$ を内包的記法で表記しなさい（普遍集合を $\mathbb{R}$ としてよい）.

問題 23 2pt 解答例あり

$A = \{a, b, c, r, s\}$, $B = \{a, c, t\}$ とする.

1. $A \cap B$ と $A \cup B$ をそれぞれ外延的記法で書きなさい.
2. $A \setminus B$ と $B \setminus A$ をそれぞれ外延的記法で書きなさい.

問題 24 4pt 解答例あり

あらゆる集合 A, B について, 次を示しなさい.

1. $A \cap B \subset B$ であることを示しなさい.
2. $B \subset A \cup B$ であることを示しなさい.

問題 25 4pt 解答例あり

1. あらゆる集合 A について，$A \subset A$ であることを示しなさい.
2. あらゆる集合 A について，$\emptyset \subset A$ であることを示しなさい.

問題 26 4pt

1. $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ であることを示しなさい.
2. $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ であることを示しなさい.

問題 27 5pt

$P(x)$ は $Q(x)$ の十分条件かつ $P(x)$ は $Q(x)$ の必要条件であるとき，$P(x)$ は $Q(x)$ の必要十分条件であることを示しなさい.

問題 28 8pt

1. $P(x) \wedge Q(x)$，$P(x) \vee Q(x)$，$\neg P(x)$ の真理集合はどのように表記できるだろうか.
2. $P(x) \to Q(x)$，$P(x) \leftrightarrow Q(x)$ の真理集合はどのように表記できるだろうか.

問題 29 4pt 解答例あり

次の命題の真偽を答えなさい.

1. $\forall x \in \mathbb{N}, x < x + 1.$
2. $\exists x \in \mathbb{Q}, x^2 = 2.$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0.$
4. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 1 = 0.$

問題 30 7pt

次の命題の真偽を答えなさい

1. $\exists y \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{Q}, xy = 1.$
2. $\forall x \in \mathbb{Q}, \exists y \in \mathbb{Q}, xy = 1.$
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, xy = y.$
4. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, xy = y.$

第 3 章

方程式

問題 31 3pt 解答例あり

次の方程式を x について解きなさい．

1. $x - 2x = 2 - x$
2. $2x = 3x$
3. $2x = 2x + 1$

問題 32 4pt 解答例あり

次の連立方程式を x, y について解きなさい．

1. $\begin{cases} x + 3y = 3y \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$

問題 33 4pt 解答例あり

次の連立方程式を x, y について解きなさい．

1. $\begin{cases} x + y = 3y \\ 3x = 6 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 4x + y = 4 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$

問題 34 6pt

次の連立方程式を x, y, z について解きなさい．

1. $\begin{cases} x + 3z = 3 \\ 3x + 2y = 4 \\ y + 3z = 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ x + 2z = 2 \end{cases}$

問題 35 2pt 解答例あり

価格が p のときの需要量が $250 - 3p$, 供給量が $100 + 2p$ であったとする．市場均衡を求めなさい．

問題 36 2pt

価格が p のときの需要量を $40 - 2p$，供給量を $20 + 4p$ とするとき，市場均衡を求めなさい．

問題 37 6pt 解答例あり

財が財 1 と財 2 の 2 種類あるとする．財 1 の価格を p_1，財 2 の価格を p_2 とする．財 1 の需要量は $40 - 2p_1 + p_2$，財 1 の供給量は $20 + 4p_1 - p_2$，財 2 の需要量は $50 - 3p_2 + p_1$，財 2 の供給量を $10 + 2p_2 - p_1$ とする．このときの市場均衡価格とは次の連立方程式の解 p_1, p_2 のペアのことである[a]．

$$\begin{cases} \text{財 1 の需要量} = \text{財 1 の供給量} \\ \text{財 2 の需要量} = \text{財 2 の供給量} \end{cases}$$

市場均衡価格を求めなさい．

[a] 2025 年 2 月 18 日問題修正

問題 38 6pt

財が財 1 と財 2 の 2 種類あるとする．財 1 の価格を p_1，財 2 の価格を p_2 とする．財 1 の需要量は $50 - 2p_1 + p_2$，財 1 の供給量を価格に依存せず 30，財 2 の需要量は $50 - p_2$，財 2 の供給量を価格に依存せず 30 とする．このときの市場均衡価格を求めなさい[a]．

[a] 2025 年 2 月 18 日（数値を変更しました）

第 4 章

不等式

問題 39 3pt 解答例あり

$a > 0$ ならば $0 > -a$ であることを次の事実のみを使って示しなさい．

1. すべての x, y について，$x > y$ ならばすべての c について $x + c > y + c$ である．
2. すべての x について，$x + (-x) = 0$ である．

問題 40 3pt

$a < 0$ ならば $0 < -a$ であることを次の事実のみを使って示しなさい．

1. すべての x, y について，$x > y$ ならばすべての c について $x + c > y + c$ である．
2. すべての x について，$x + (-x) = 0$ である．

問題 41 3pt 解答例あり

$a > 0$ ならばすべての $b > 0$ について $0 > -ab$ であることを次の事実のみを使って示しなさい．

1. すべての x, y について，$x > y$ ならばすべての c について $x + c > y + c$ である．
2. すべての x について，$x + (-x) = 0$ である
3. すべての x, y について，$x > 0$ かつ $y > 0$ ならば $xy > 0$ である．

問題 42 3pt

$a > 0$ ならばすべての $b < 0$ について $-ab > 0$ であることを次の事実のみを使って示しなさい．

1. すべての x, y について，$x > y$ ならばすべての c について $x + c > y + c$ である．
2. すべての x について，$x + (-x) = 0$ である．
3. すべての x, y について，$x > 0$ かつ $y > 0$ ならば $xy > 0$ である．

問題 43 2pt

$b > 0$ ならば $a + b > a$ であることを示しなさい．ただし，$x > y$ であるとは $x - y$ が正の数であることと定義する．

問題 44 2pt

$b < 0$ ならば $a > a + b$ であることを示しなさい．ただし，$x > y$ であるとは $x - y$ が正の数であることと定義する．

問題 45 2pt 解答例あり

$a > 0$ かつ $0 < b < 1$ とする．このとき $c > a$ ならば $c > ab$ であることを示しなさい．ただし，$x > y$ であるとは $x - y$ が正の数であることと定義する．

問題 46 2pt

$a > 0$ かつ $b > 1$ とする．このとき $a > c$ ならば $ab > c$ であることを示しなさい．ただし，$x > y$ であるとは $x - y$ が正の数であることと定義する．

問題 47 2pt

$a < 0$ かつ $b > 1$ とする．このとき $c > a$ ならば $c > ab$ であることを示しなさい．ただし，$x > y$ であるとは $x - y$ が正の数であることと定義する．

問題 48 2pt

$a < 0$ かつ $0 < b < 1$ とする．このとき $0 > a > c$ ならば $ab > c$ であることを示しなさい．ただし，$x > y$ であるとは $x - y$ が正の数であることと定義する．

問題 49 3pt

$a > b$ かつ $c > d$ ならば $a + c > b + d$ であることを示しなさい．ただし $x > y$ であることの定義は $x - y > 0$ であり，正の数同士を足しても正の数であることを利用して良い．

問題 50 5pt 解答例あり

$x \geqq y$ ならば $x^3 \geqq y^3$ であることを示しなさい．

問題 51 3pt 解答例あり

$x < y < 0$ であるとき，不等式の推移性を用いて，$x^2 > y^2$ であることを示しなさい．

問題 52 6pt

アダムとイヴが共同作業することを考える．二人共が協力すれば作業は成功する．一人がサボればイマイチで，両方サボれば作業は失敗する．成功すると利益が 100, イマイチであれば利益が 30 である．協力するための費用が c であるとする．アダムとイヴで利益は山分けするものとすれば c がいくら以下であれば両者が協力するような山分け方法が存在するか答えなさい．

問題 53 4pt 解答例あり

☆推移性を満たさないような「関係」をひとつ挙げなさい．

第 5 章

関数

問題 54 1pt 解答例あり

関数 f を $f(x) = x^2 + 3x$ と定める.

1. $f(2)$ を計算しなさい
2. $f(x+2)$ を計算しなさい
3. $f(x^2)$ を計算しなさい

問題 55 1pt 解答例あり

関数 f を $f(x) = x^3 + 2x + 1$ と定める.

1. $f(4)$ を計算しなさい
2. $f(x+1)$ を計算しなさい
3. $f(x^2)$ を計算しなさい

問題 56 3pt

関数 f が $f(x, y) = xy + x + 2y$ であらわされるとき，$f(1, 3)$, $f(3, 1)$, $f(x+1, y+1)$ をそれぞれ計算をしなさい.

問題 57 5pt 解答例あり

$f(x) = (x+1)^2$, $g(x) = 2x + 1$ とする.

1. $f \circ g(x)$ および $g \circ f(x)$ を計算しなさい.
2. $g^{-1}(y)$ を計算しなさい.

問題 58 3pt 解答例あり

どんな関数 f についても $g \circ f = f$ となるような関数 g をひとつ見つけなさい.

問題 59 5pt 解答例あり

関数 f がある．定義域に属する二つの異なる数 x, x' について，$f(x) = f(x') = y$ であるという．この関数に逆関数が存在しないことを証明しなさい．

問題 60 2pt 解答例あり

次の二点を通る一次関数をそれぞれ $f(x) = ax + b$ のかたちで求めなさい．

1. $(2, 3), (3, 2)$
2. $(1, 5), (4, 4)$
3. $(2, 3), (2, 7)$
4. $(1, 1), (-4, 3)$
5. $(2, -3), (-2, -4)$

問題 61 4pt 解答例あり

あるコンビニではパンが 120 円のときには 40 個売れ，100 円に値下がりしたときには 70 個売れる．更にパンの売上個数と価格は一次関数の関係にある．

1. パンの需要関数を求めなさい．
2. 逆需要関数を求めなさい．
3. 需要関数の傾きが 1/2 倍になったという．パンの価格が 120 円のとき，パンはいくら売れるか答えなさい．
4. 価格が 120 円から 100 円に値下がりしたときの需要の価格弾力性を求めなさい．

問題 62 4pt

あるコンビニではパンが 200 円のときには 10 個売れ，100 円に値下がりしたときには 700 個売れる．更にパンの売上個数と価格は一次関数の関係にある．

1. パンの需要関数を求めなさい．
2. 逆需要関数を求めなさい．
3. 逆需要関数の傾きが 3 倍になったという．パンの価格が 100 円のとき，パンはいくら売れるか答えなさい．
4. 価格が 200 円から 100 円に値下がりしたときの需要の価格弾力性を求めなさい．

第 6 章

二次関数

問題 63 5pt

1. 次の二次関数を標準形に直しなさい

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 10$$
$$f(x) = -x^2 + 4x + 10$$

2. 次の二次関数を一般形に直しなさい

$$f(x) = 5(x-3)^2 + 3$$
$$f(x) = c^2\left(x - \frac{2ab}{c}\right)^2 + 3abc$$

問題 64 4pt 解答例あり

あるコンビニではパンが 100 円のときには 30 個売れ, 120 円に値上がりすると 10 個しか売れない. パンの需要関数は価格の一次関数であるという. この街にはひとつしかコンビニがないとする.

1. 需要関数を求めなさい.
2. 逆需要関数を求めなさい.
3. パンを作るにはひとつ 20 円かかるという. 需要関数を使ってこのコンビニの利潤を書き, 利潤を最大化する販売価格を求めなさい.

問題 65 3pt 解答例あり

需要関数が $D(p) = 100 - p$ で与えられていたとする. 独占企業の行動を考える. 独占企業は生産量を決めるとする. また q だけの財を生産するのにコストが q^2 かかるとする. このとき, 独占企業の利潤を最大にする生産量をもとめなさい. またそのときの逆需要関数によって定まる価格を求めなさい.

問題 66 5pt 解答例あり

需要関数が $D(p) = 100 - 3p$ で与えられていたとする. 独占企業の行動を考える.

1. 逆需要関数を求めなさい.
2. 独占企業は生産量を決めるとする. また財一単位を生産するのにコストが 2 かかるとする. このとき，独占企業の利潤を最大にする生産量をもとめなさい. またそのときの逆需要関数によって定まる価格を求めなさい.
3. 独占企業は価格を決めるとする. また財一単位を生産するのにコストが 2 かかるとする. このとき，独占企業の利潤を最大にする価格をもとめなさい. またそのときの需要関数によって定まる需要量を求めなさい.

問題 67 3pt 解答例あり

需要関数が $D(p) = 120 - p$ で与えられていたとする.

1. 独占企業の行動を考える. 独占企業は生産量を決めるとする. また q だけの財を生産するのにコストが $3q$ かかるとする. このとき，独占企業の利潤を最大にする生産量をもとめなさい.
2. 1 のとき逆需要関数によって定まる価格を求めなさい.

問題 68 8pt 解答例あり

消費者が互いに行き来できない二つの地域 A,B がある. この二地域で独占的に車を売る企業が存在する. A 地域では 100 万円で車を売ると 20 万台売れ, 120 万円に値上げすると 15 万台売れる. B 地域では 100 万円で車を売ると 30 万台売れ, 120 万円に値上げすると 10 万台売れる.
A 地域の需要関数も B 地域の需要関数も一次関数であるという.

1. A 地域の需要関数を求めなさい.
2. B 地域の需要関数を求めなさい.
3. 車を一台生産するには 10 万円かかるとする. また A 地域と B 地域では同じ価格をつけなければならない. このとき企業の利潤を最大にする価格を求めなさい.

第 7 章

指数・対数

問題 69 2pt

次の指数を計算しなさい．(a) 2^4, (b) 3^3, (c) $(2^2)^2$, (d) $3^{(3^2)}$.

問題 70 2pt

次の指数を計算し，x^z （z は実数）のような形に直しなさい． (a) $x^{-2} \cdot x^3$, (b) $\dfrac{x^2}{x^{-3}}$, (c) $\dfrac{x^{-1/3}}{x^{2/3}}$, (d) $x^2 \cdot x^{1/3}$.

問題 71 4pt 解答例あり

指数法則の一つに $(a^n)^m = a^{nm}$ がある. これを用いて, $\log_a b^n = n \log_a b$ が成立することを対数の性質 $a^{\log_a b} = b$ から示しなさい.

問題 72 4pt 解答例あり

次の二つを比べ，最終的にどちらの方法が金額が高くなるか答えなさい．（電卓を使って良い．）ただしどちらの方法も複利計算で，さらに他に預け替えができないとする．

(a) 年利 2% で 1 万円を 10 年間預ける．

(b) 年利 1% で 3 年間，年利 3% で次の 5 年間，最後の 2 年を年利 1% で 1 万円を預ける．

問題 73 8pt

1. 割引因子が δ のとき，割引率はいくらだろうか．
2. t 年後に a 億円が償還されるゼロクーポン債の割引現在価値を割引因子 δ を使って書きなさい．
3. t 年後に a 億円が償還されるゼロクーポン債がある．この債券の割引率を r としたとき，割引現在価値がちょうど p 円なら利回りは r であるという．利回り r を a, p, t の式で表しなさい．

4. 10 年後に 1 億円が償還されるゼロクーポン債と 50 年後に 5 億円が償還されるゼロクーポン債がある．割引率がいくらならこの二つの債券の割引現在価値が等しくなるか，答えなさい．

問題 74 2pt 解答例あり

今，銀行に X 円預けるとする．利子率は 1% である．

1. t 年経ったときの預金額を求めなさい．
2. 1 の結果が $2X$ 以上であるという不等式を立てなさい．
3. 2 の不等式の両辺に $\log_2$ を作用させることで何年経てば預金額が $2X$ 円以上になるか計算しなさい．ただし，整数で答えなさい．また，$\log_2(1.01) = 0.014$，$\log_2(1.02) = 0.028$ として計算して良い．

問題 75 2pt 解答例あり

今，銀行に X 円預けるとする．利子率は 3% である．何年経てば預金額が $2X$ 円以上になるか計算しなさい．ただし，整数で答えなさい．また，$\log_2(1.03) = 0.042$，$\log_3(1.02) = 0.018$ として計算して良い．

問題 76 2pt

手元にある 1 万円を年利 2% で預けるとき, 何年経てば 2 万円にすることができるだろうか. 計算しなさい. ただし log を使って良い.

問題 77 3pt 解答例あり

10 年後に 3000 万円が償還されるゼロクーポン債と 5 年後に 2000 万円が償還されるゼロクーポン債があるとする．両者が等しい割引現在価値を持つには割引因子はいくらでなくてはならないか答えなさい．

問題 78 5pt

$\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$ であることを指数法則を用いて証明しなさい．

問題 79 5pt 解答例あり

$\log_a(x^p) = p \log_a x$ であることを指数法則を用いて証明しなさい．

問題 80 5pt 解答例あり

$\log_a b$ を $\log_c a$ と $\log_c b$ を使って書きなさい．（ヒント：$a^{\log_a b} = b = c^{\log_c b}$ という関係を用いること．）

第 8 章

数列と極限

問題 81 2pt

次の等比数列を考える.

$$2, 4, 8, 16, 32, \ldots$$

初項と公比を求めなさい. また 11 番目の項はなにか?

問題 82 2pt

次の等比数列を考える.

$$5, 2.5, 1.25, 0.625, \ldots$$

初項と公比を求めなさい. また 8 番目の項はなにか?

問題 83 2pt 解答例あり

次の数列を考える.

$$2, 3, 4.5, 6.75, \cdots$$

この数列は等比数列であるという. この数列の n 番目の項を求めなさい.

問題 84 2pt 解答例あり

次の数列を考える.

$$1, -2, 4, -8, 16, \cdots$$

この数列は等比数列であるという. この数列の n 番目の項を求めなさい.

問題 85 3pt

$a_{t+1} - a_t = \delta$ がすべての t について成り立つ数列を等差数列と呼びます．この数列 a_{t+1} を a_1 と δ を用いて書きなさい．(ヒント：$a_2 - a_1 = \delta$ であるので，$a_2 = \delta + a_1$，…という作業を続けていくと？)

問題 86 2pt 解答例あり

現在の口座残高が 0 で利子率 r の複利計算の口座に t 年間毎年 c 万円を追加して預け入れるとする．t 年目に預け入れられた時点での口座残額 S_t を求めなさい．

問題 87 2pt

$a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ で定められる数列 (a_n) について，a_1 から a_{10} までエクセルなどのソフトウェアを使って計算しなさい．

問題 88 1pt 解答例あり

数列 $(a_t)_{t=1}^{\infty}$ が等比数列であるとはどういうことか，定義を答えなさい．

問題 89 3pt

次のように定められる数列について，$t \to \infty$ としたときの極限を求めなさい．

1. $a_t = \dfrac{2}{t}$
2. $a_t = t^2 - t$
3. $a_t = \dfrac{t^2}{t+2}$

問題 90 3pt 解答例あり

次の極限の計算をしなさい．

1. $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{t}{t-1}$
2. $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{t}{1/t}$
3. $\displaystyle\lim_{t\to\infty} (t - \sqrt{t-1})$

問題 91 7pt 解答例あり

$x > 1$ であるとする．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x^n = \infty$ であることを示しなさい．ただし次の定理を使って良い．

二項定理:　すべての実数 x，h と自然数 n について $(x+h)^n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} {}_nC_i x^i h^{n-i}$

問題 92 6pt

$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^2}$ を計算することを考える.

1. 二項定理によればすべての実数 a, b とすべての整数 n について以下の等式が成立する.

$$(a+b)^n = \sum_k \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k} = a^n b^0 + na^{n-1}b^1 + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} a^{n-3} b^3 + \cdots + a^0 b^n$$

ただし，$a > 0, b > 0$ であれば上記の式の項は全て正であることに注意しなさい. この定理を用いて，以下の事実を示しなさい.（ヒント：$a = b = 1$ を代入して考える）

$$2^n \geq 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

2. 1 の結果を用いて，$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^2} = \infty$ であることを示しなさい.

問題 93 4pt 解答例あり

利子率 $r > 0$ の複利計算の口座に t 年間毎年 1 万円を追加して預け入れるとする.

1. t 年目に預け入れられた時点での口座残額 S_t を求めなさい.
2. $t \to \infty$ とするとき, S_t の極限を求めなさい.

問題 94 3pt 解答例あり

利子率 $r > 0$ の複利計算の口座に 10 年間毎年 1 万円を追加して預け入れるとする.

1. 10 年目に預け入れられた時点での口座残額 S_{10} を求めなさい.
2. S_{10} の割引現在価値を求めなさい.

問題 95 4pt 解答例あり

割引因子が 0.9 であるとする．今, 1 年後から t 年後まで毎年 X 万円が振り込まれるという債券があるとする.

1. 1 年後に振り込まれる金額の割引現在価値を求めなさい.
2. k 年後に振り込まれる金額の割引現在価値を a_k とする. a_k を求めなさい.
3. $S_t = a_1 + a_2 + \cdots + a_t$ とする. S_t を求めなさい.
4. $t \to \infty$ となるとき S_t の極限を求めなさい.

問題 96 4pt 解答例あり

割引因子が δ（ただし $0 < \delta < 1$）であるとする．今, 1 年後から t 年後まで毎年 2 万円が振り込まれるという債券があるとする.

1. 1 年後に振り込まれる金額の割引現在価値を求めなさい.
2. k 年後に振り込まれる金額の割引現在価値を a_k とする. a_k を求めなさい.
3. $S_t = a_1 + a_2 + \cdots + a_t$ とする. S_t を求めなさい.
4. $t \to \infty$ となるとき S_t の極限を求めなさい.

問題 97 5pt 解答例あり

利子率が 2% であるとする．今, 1 年後から t 年後まで毎年 X 万円が振り込まれるという債券があるとする.

1. 1 年後に振り込まれる金額の割引現在価値を求めなさい.
2. k 年後に振り込まれる金額の割引現在価値を a_k とする. a_k を求めなさい.
3. t 年後まで振り込まれるとしたときの振り込まれる金額の割引現在価値の合計を求めなさい.

問題 98 9pt

エリオットは 2026 年から 2069 年まで，t 年 1 月 2 日に s_t 円だけ振り込まれる口座を持っている．今は 2022 年である．（年）利子率を r とする．利子は年 1 回その年の 1 月 1 日に振り込まれるとする. これ以外には振込も引き出しもなく，また 2022 年時点での口座残高は 1000 円である．エリオットは 2026 年以降 2069 年まで，t 年 12 月 30 日に d_t 円だけ引き出すとする. ただし，$s_t \geqq d_t$ であるとする.

1. t 年の一年間でいくら合計で預金したことになるか，s_t, d_t を使って答えなさい.
2. 2069 年の 12 月 31 日におけるこの口座の残高を $(s_t), (d_t), r$ およびシグマ記号を用いて答えなさい.
3. 2050 年 12 月 31 日にエリオットはジェイソンにこの口座を X 円で譲ってほしいと言われた．X がいくら以上であれば譲ることが得になるか計算し，$(s_t), (d_t), r$ およびシグマ記号を用いて答えなさい.（ヒント：2050 年までと 51 年以降を分けて考える.）

問題 99 8pt 解答例あり

$a_n = \alpha a_{n-1} + \beta$ と書かれる数列について考える．ただし $\alpha \neq 1$ とする.

1. 両辺に $-\frac{\beta}{1-\alpha}$ を足すことで
$$b_n = \alpha b_{n-1}$$
という形の等比数列に変形できる．b_n を a_n, α, β を用いて書きなさい.

2. b_n を a_1, α, β を用いて書きなさい．
3. a_n を a_1, n, α, β を用いて書きなさい．

問題 100 10pt 解答例あり

10 万円の品物をローンを組んで買うことを考える．以下の問いに答えなさい．ただし，小問 3，4 には電卓などを使って良い．

1. 毎月 1 万円支払うとする．未払い分の残金には月当たり 1% の利子がつく．つまり，t ヶ月目の支払いが終わった後の未払い残金を a_t 万円とすると $a_{t+1} = 1.01(a_t - 1)$ である．このとき，$a_{t+1} - k = 1.01(a_t - k)$ を満たす k を求めなさい．
2. $a_0 = 10$ であることから a_t を求めなさい．
3. $a_t < 0$ となる最小の t（つまり完済までにかかる期間）を求めなさい．
4. 支払い総額を求めなさい．

問題 101 10pt

30 万円の品物をローンを組んで買うことを考える．毎月 2 万円支払うとする．未払い分の残金には月当たり 1.1% の利子がつく．完済までにかかる期間と支払い総額を求めなさい．ただし，計算ソフトウェアや電卓を使って良い．

問題 102 20pt 解答例あり

☆数列 (a_t) について，ある実数 M, L に対してすべての t について $L \leqq a_t \leqq M$ となるとき，(a_t) は有界であるという．さらに，すべての t, t' について $t > t'$ ならば $a_t \geqq a_{t'}$ であるとき，数列 (a_t) は単調非減少であり，またすべての t, t' について $t > t'$ ならば $a_t \leqq a_{t'}$ であるとき，数列 (a_t) は単調非増加であるという．単調非減少，あるいは単調非増加である数列は単調であるという．有界かつ単調な数列は必ず極限 α をもち，$L \leqq \alpha \leqq M$ であることが知られている．これを踏まえて以下の問いを考える．

f は定義域と終域を区間 $[0, 1]$ とする関数である．ただし f はすべての $x < y$ となる x, y について $f(x) < f(y)$ を満たすという．このとき $f(x^*) = x^*$ となる $x^* \in [0, 1]$ が存在することを示しなさい．

問題 103 4pt 解答例あり

$a_m = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{m}$ としたときの $\lim_{m\to\infty} a_m$ と $b_n = \lim_{m\to\infty} \dfrac{n}{m}$ としたときの $\lim_{n\to\infty} b_n$ が異なることを示しなさい．（極限を取る順番が違えば結果が違う）

第 9 章

確率

問題 104 2pt 解答例あり

次の試行について，事象の例を３つずつ挙げなさい．

- コインを投げる．
- コインを二回投げる．

問題 105 1pt

6 面サイコロを考える．それぞれの目が出る確率は $\frac{1}{6}$ であるとする．次の確率を求めなさい．

1. 偶数の目が出る確率．
2. 4 以上の目が出る確率．

問題 106 5pt 解答例あり

以下では $A \subset B$ となるような A, B について考える．$B = (B \setminus A) \cup A$ であることに注意する．

1. $(B \setminus A) \cap A = \emptyset$ であることを示しなさい．
2. P を確率とするとき，$P(B \setminus A) > 0$ であれば，$P(A) < P(B)$ であることを示しなさい．ただしコルモゴロフの公理を用いること．

問題 107 5pt

$X = \{0, 1, 2\}$ とする．次の P を考えたとき，P は X の上の確率であるといえるかどうか説明しなさい．

$$
\begin{aligned}
&P(\{0\}) = 1/2, P(\{1\}) = 1/4, P(\{2\}) = 1/4, \\
&P(\{0,1\}) = 3/4, P(\{1,2\}) = 2/3, P(\{0,2\}) = 3/4 \\
&P(\{0,1,2\}) = 1
\end{aligned}
$$

問題 108 2pt 解答例あり

サイコロを使った次のくじを考える．1,2,3,4 が出れば 100 円，5,6 が出れば 1000 円もらえるとする．もらえる金額の期待値を計算しなさい．ただしそれぞれの目が出る確率は 1/6 であるとする．

問題 109 2pt 解答例あり

コインを二つ投げることを考える．それぞれのコインの表が出る確率は独立で表が出る確率はそれぞれ 1/2 とする．このとき，表が出るコインの枚数の期待値を求めなさい

問題 110 8pt 解答例あり

次の宝くじを考える. 当選金額と当選本数は次のとおりである.

金額 (円)	7 億	2 億	千万	百万	十万	3000	300
本数 (本)	25	50	500	5000	4 万	500 万	5000 万

宝くじの総発行数は 5 億枚である． 宝くじを一枚購入するときの当選金額の期待値を求めなさい.

問題 111 12pt 解答例あり

次のくじを考える.

- コインを裏が出るまで投げ続ける.
- 初めて裏が出たときまでに表が出た回数を X とする.
- このくじでは賞金 2^X 円がもらえる.
- コインで表が出る確率及び裏が出る確率は $\frac{1}{2}$ である.

1. 1 回目で終わる確率とそのときの賞金額を答えなさい.
2. 10 回目で終わる確率とそのときの賞金額を答えなさい.
3. n 回目で終わる確率とそのときの賞金額を答えなさい
4. このくじでもらえる賞金の期待値を求めなさい.
5. このくじの胴元（主催者）が用意できる賞金の金額の最大値が 2^{40} 円（約 1 兆円）であるとする．このときこのくじの賞金の期待値を求めなさい.
6. このくじに Y 円払ったら参加することができる．Y がいくらなら参加するか，あなたの考えを書きなさい.

問題 112 3pt 解答例あり

ある企業にはふたつの可能性があり, それは良い, 悪いである. それぞれの確率は 90%, 10% である. ある日, その企業が不祥事を起こした. 良い企業が不祥事を起こす確率は 10%, 悪い企業が不祥事を起こす確率が 90% である. この企業が悪い企業である確率を求めなさい.

問題 113 3pt

ある企業には 3 つの可能性があり，それは 良い， 普通， 悪い である．それぞれの確率は 40%，50%，10% である．
ある日，その企業が不祥事を起こした．良い企業が不祥事を起こす確率は 10%，普通の企業が不祥事を起こす確率が 40%，悪い企業が不祥事を起こす確率が 100% である．
この企業が悪い企業である確率を求めなさい．

問題 114 3pt

1% の人がかかる病気に精度 95% の検査で陰性が出た．病気にかかっている確率はいくらか計算しなさい．

問題 115 3pt

事象 E と F が排反事象であるとき，$P(E \mid F)$ を求めなさい．

問題 116 8pt

コンスタンチンはコインを一度投げて， 表が出れば 1m 西に進み， 裏が出れば東に 2m 進むというゲームをしている． 投げる前の位置を 0 として， 西に xm 進んだときのコンスタンチンの位置を x， 東に ym 進んだときの位置を $-y$ と表現する． コインが表である確率は p とする．

1. コンスタンチンはコインを一度投げたらしい． 彼の位置の期待値を計算しなさい．
2. コンスタンチンはコインを二回投げたところ， 彼の位置が 0 以下であるらしいという情報がもたらされた． この情報をもとにコンスタンチンの位置の期待値を計算しなさい．

問題 117 10pt 解答例あり

コインを何回も投げ続けることを考える．ただしコインは確率 0.3 で歪んでおり, 0.7 で正常なコインであるがこれは見た目には区別がつかない．歪んだコインの場合，確率 0.6 で表が出る．

1. コインの表が出る確率を求めなさい
2. 表が出たとする．このコインが歪んでいる確率を求めなさい．
3. 2 回連続で表が出たとする． このコインが歪んでいる確率を求めなさい．
4. 2 回連続で表が出たとする．次にコインを投げたとき表が出る確率を求めなさい．
5. 連続で表が出た回数が ∞ になるとき，コインが歪んでいることの確率の極限を求めなさい．

問題 118 7pt 解答例あり

シュメールの年齢を当てるゲームを考える. シュメールの年齢は 29 歳か 30 歳であることがわかっている． シュメールはなるべく若くみられたいと思っている．（つまり年齢の期待値をなるべく小さくしたい）シュメールは実年齢を正直に言うか，それとも全く言わないかを選ぶことができ

る．（嘘をつくことはできないものとする）また，29 歳である確率と 30 歳である確率はそれぞれ 1/2 とする．

1. シュメールが n 歳のとき，年齢を明かさない確率を q_n とする．このとき年齢を明かさないときのシュメールの年齢の期待値を求めなさい．（ヒント：条件付き確率を用いる）
2. シュメールが 29 歳のとき，全く明かさない場合と年齢を明かす場合とでどちらが年齢の期待値が小さくなるか，答えなさい．
3. 2 を踏まえて，シュメールが 29 歳のとき q_{29} をいくらにするのがシュメールにとって良いか，答えなさい．

問題 119 9pt

シュメールの年齢を当てるゲームを考える．シュメールの年齢は 29 歳か 30 歳か 31 歳であることがわかっている． シュメールはなるべく若くみられたいと思っている．（つまり年齢の期待値をなるべく小さくしたい）シュメールは実年齢を正直に言うか，それとも全く言わないかを選ぶことができる．（嘘をつくことはできないものとする）また，29 歳である確率と 30 歳である確率はそれぞれ 1/3 とする．

1. シュメールが n 歳のとき，年齢を明かさない確率を q_n とする．このとき年齢を明かさないときのシュメールの年齢の期待値を求めなさい．（ヒント：条件付き確率を用いる）
2. シュメールが 29 歳のとき，全く明かさない場合と年齢を明かす場合とでどちらが年齢の期待値が小さくなるか，答えなさい．
3. 2 を踏まえて，シュメールが 29 歳のとき q_{29} をいくらにするのがシュメールにとって良いか，答えなさい．
4. 3 を踏まえて，30 歳のとき，年齢を明かさないときのシュメールの年齢の期待値を考えることで q_{30} をいくらにするのがシュメールにとって良いか，答えなさい．

問題 120 5pt 解答例あり

（6 面の）サイコロを使った次のくじを考える．サイコロを一つ振って X の目が出たとき，X 万円の賞金がもらえる．サイコロを振るディーラーは二人いる．一人は凡人で彼が振ると各々の目が出る確率は同じ（1/6）である．一方でもう一人は天才で狙って 1 を出すことができる．つまり天才がサイコロを振ると確率 1 で 1 が出る．いまいるディーラーがどちらかはわからない．凡人である確率は 1/2 である．

1. サイコロを一回だけふってもらうとき，X の期待値を求めなさい．
2. サイコロを一回だけふってもらったとき 1 が出た．このときこのディーラーが天才である確率を求めなさい．
3. 2 のあと，サイコロを同じディーラーにもう一度ふってもらうとき，その時点での X の期待値を求めなさい．

問題 121 8pt 解答例あり

次の文章を読んで空欄を埋めなさい．（解答は小数点第 3 位以下切り捨てで行うこと．）

事業家カルル氏は自分に才能があると世間に知らしめたい．彼が才能ある事業家なら努力すれば 0.6 の確率で事業が成功し，努力しなければ 0.4 の確率で事業が成功する．もし彼に才能がなければ努力すると 0.4，努力しなければ成功確率は 0.2 である．我々世間の人々にはカルル氏に才能あるかどうかはわからないが前評判としては才能がある確率は 0.5 である．さて，カルル氏は必死に努力をしていることがわかった．

この時点で世間から見た彼が成功する確率は [ア] である．さて努力している状態でカルル氏が事業に成功すれば，彼に才能がある確率は条件付き確率を使って計算すると [イ] である．

一方で努力しなければ，そして努力しなかったことが世間に明らかになれば世間から見た成功確率は [ウ] である．この努力しなかったという情報がわかったうえで事業に成功すれば条件付き確率を使って計算すると才能がある確率は [エ] である．

では事業に失敗したときカルル氏の評判はどうなるだろうか．努力して失敗したという情報から条件付き確率を使って計算すると才能がある確率は 0.4 である．その一方で努力せずに失敗したという情報から条件付き確率を使って計算すれば，才能がある確率は [オ] である．さてカルル氏は本当に努力すべきだっただろうか...

問題 122 5pt

次の文章を読んで空欄を埋めなさい．ただし空欄の大きさは全て同じであるが，答えの文字数が同じとは限らない．

裏が伏せられたカードがある．裏の数字は 0 か 1 である．0 である確率は p である．あなたは数を言うことができ，当たれば賞金 1 万円がもらえるが，外れれば賞金はもらえないとする．

(a) 司会者 1 は裏の数字を知っているが，聞くと確率 q で本当のことを言い，$1-q$ で嘘を言う．今, 司会者 1 は 0 が正しい数字だと言った．このとき，0 を選ぶことが 1 を選ぶことよりもらえる期待値の賞金の期待値の期待値が高くなるための条件は次のとおりである．

$$\frac{\boxed{}}{\boxed{}}\frac{q}{\boxed{}} > 1$$

(b) (a) の状況に加えて，司会者 2 が追加で登場する．司会者 2 も裏の数字を知っているが，聞くと確率 r で本当のことを言い，$1-r$ で嘘を言う．今, 司会者 2 は 1 が正しい数字だと言った．このとき，0 を選ぶことが 1 を選ぶことよりもらえる期待値の賞金の期待値の期待値が高くなるための条件は次のとおりである．

$$\frac{\boxed{}}{\boxed{}}\frac{q}{\boxed{}}\frac{\boxed{}}{\boxed{}} > 1$$

第 10 章

連続関数

問題 123 6pt 解答例あり

f は定義域を $[0,1]$ とする連続関数で，すべての x について $0 \leqq f(x) \leqq 1$ を満たすという．このとき，中間値の定理を用いて $f(x^*) = x^*$ となる $x^* \in [0,1]$ が存在することを示しなさい．

問題 124 6pt

f は定義域と終域を $[0,1]$ とする連続関数で，f はすべての $x < y$ となる x, y について $f(x) > f(y)$ を満たすという．このとき，中間値の定理を用いて $f(x^*) = x^*$ となる $x^* \in [0,1]$ がただひとつ存在することを示しなさい．

問題 125 6pt

定義域と終域を $(0,1)$ とする連続関数で，$f(x^*) = x^*$ となる $x^* \in [0,1]$ が存在しないような関数 f を作りなさい．

問題 126 6pt 解答例あり

f は定義域と終域を $[0,1]$ とする関数であるが連続であるとは限らないとする．$f(x^*) = x^*$ となる $x^* \in [0,1]$ が存在しないような f の例を作りなさい．

問題 127 6pt 解答例あり

$f(x^*) = x^*$ となる $x^* \in [0,1]$ が存在しないような連続関数 f の例を作りなさい．

問題 128 6pt 解答例あり

f を $f(1) < 0 < f(-1)$ を満たすような連続関数であるとする．ただし f の定義域を実数全体とする．このとき，$-|f(x)|$ の最大値を求めなさい．

第 11 章

一変数関数の微分

問題 129 1pt 解答例あり

微分係数の定義を書きなさい.

問題 130 1pt 解答例あり

次の関数について，微分係数を求めなさい.

1. $f(x) = 2$
2. $f(x) = 2x$

問題 131 1pt 解答例あり

次の関数について，微分係数を求めなさい.

1. $f(x) = x^{1/2}$
2. $f(x) = x^{-4/5}$

問題 132 2pt 解答例あり

次の関数について，微分係数を求めなさい.

1. $f(x) = \ln(2^x)$
2. $f(x) = 2^x$

問題 133 2pt 解答例あり

次の関数について，微分係数を求めなさい.

1. $f(x) = x\ln(x)$
2. $f(x) = x^x$

問題 134 6pt

次の関数について，微分係数を求めなさい．

1. $f(x) = x^{(x^x)}$.
2. $f(x) = (x^x)^x$.

問題 135 2pt 解答例あり

次の関数について，微分係数を求めなさい．

1. $f(x) = \frac{1}{x^2}$
2. $f(x) = \frac{x}{1-x}$

問題 136 2pt 解答例あり

$f(x) = a$（a は実数の定数）であるとする．このとき $f'(x) = 0$ であることを微分の定義に従って証明しなさい．

問題 137 3pt 解答例あり

$f(x) = x^n$（n は自然数）であるとする．このとき　$f'(x) = nx^{n-1}$ であることを微分の定義に従って証明しなさい．
ただし次の定理を使って良い．

二項定理: すべての実数 x，h と自然数 n について $(x+h)^n = \sum_{i=0}^{n} {}_nC_i x^i h^{n-i}$ である．
ただし，${}_nC_i = \frac{n!}{(n-i)!i!}$ であり，${}_nC_0 = 1$ である．また，$i = n-1$ のときは ${}_nC_{n-1} = n$ である（${}_nC_i$ に関する知識はこれで十分である）．

問題 138 3pt 解答例あり

微分の線形性を微分の定義に従って証明しなさい．
できなければ次の方針を参照すること．

Step 1: $f(x) = ag(x) + bj(x)$ とおく．
Step 2: $f(x)$ の微分係数を定義に従って書く．
Step 3: $f(x)$ と $f(x+h)$ のところにそれぞれ $ag(x) + bj(x)$ と $ag(x+h) + bj(x+h)$ を代入する．
Step 4: $g(x)$ と $j(x)$ の微分の定義になるようにそれぞれ式を移動する．

問題 139 7pt 解答例あり

☆合成関数の微分の公式を証明しなさい．(ヒント：$j(x) = f(g(x))$ としたとき，$g(x+h) - g(x)$ を微分の公式における分母の部分のように考える)

問題 140 10pt 解答例あり

1. $f^2(x) = f(f(x))$ と定義する．このとき，f^2 の微分係数を求めなさい．
2. すべての自然数 n について，$f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$ と定義する．このとき，f^n の微分係数を求めなさい．

問題 141 5pt

関数, f, g, h について，$f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$ を微分することを考える．$j(x) = f(x) \cdot g(x)$ とおき，積の微分の公式を繰り返し適用することで $(f(x) \cdot g(x) \cdot h(x))'$ を計算しなさい．

問題 142 5pt

関数, f, g, h について，$f(g(h(x)))$ を微分することを考える．$j(x) = f(g(x))$ とおき，合成関数の微分の公式を繰り返し適用することで $(f(g(h(x))))'$ を計算しなさい．

問題 143 3pt

対数微分を用いて次の事実を示しなさい．すべての a について，$(x^a)' = ax^{a-1}$.

問題 144 3pt 解答例あり

$x > y$ とし，$y \leqq a \leqq x$ となるすべての a について $f'(a) < 0$ であるとする．このとき，$f(x) < f(y)$ であることを平均値の定理を使って示しなさい．

問題 145 12pt 解答例あり

☆ネイピア数を $e = \lim_{m\to\infty}(1+1/m)^m$ で定義する．また関数 f を $f(x) = e^x$ と定義する．このとき $f'(x) = e^x$ であることを微分の定義に従って示したい．

1. $\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x \frac{e^h-1}{h}$ であることを確かめなさい．
2. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$ を計算する．ネイピア数の定義より，$e^h = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{h}{n}\right)^n$ であることを示しなさい．
3. $\lceil n \rceil$ を n 以上の最小の整数とする（例えば $n = 10.4$ なら $\lceil 10.4 \rceil = 11$）．このとき，$\lceil n \rceil$ が整数であることから，微分公式と $(1+x)^{\lceil n \rceil}$ のテイラー展開を用いて以下の不等式を示しなさい．

$$(1+h/n)^n \leqq 1 + (1+h/n)^n h \frac{\lceil n \rceil}{n}$$

4. $\frac{e^h-1}{h} \leqq e^h$ を示しなさい．ただし $\lceil n \rceil \leqq n+1$ であることに注意する．
5. $\lfloor n \rfloor$ を n 以下の最大の整数とする（例えば $n = 10.4$ なら $\lfloor 10.4 \rfloor = 10$）．このとき，$\lfloor n \rfloor$ が整数であることから，微分公式と $(1+x)^{\lfloor n \rfloor}$ のテイラー展開を用いて以下の不等式を示しな

さい．

$$(1+h/n)^n \geqq 1+\frac{\lfloor n\rfloor}{n}h$$

6. $\frac{e^h-1}{h} \geqq 1$ を示しなさい．ただし $\lceil n\rceil \geqq n-1$ であることに注意する．
7. 4,6 の結果を用いて，$(e^x)'=e^x$ であることの証明を完成させなさい．

問題 146 10pt 解答例あり

☆$[a,b]=\{y\colon a\leqq y\leqq b\}$ と定義される（これを閉区間と呼ぶ）．$x\in[a,b]$ の範囲で微分可能[*1]な関数 f は必ず最小値と最大値をもつことが知られている．[*2]この事実を使って以下の定理を証明しなさい．

ロルの定理　すべての微分可能な関数 g について，$g(a)=g(b)$ であるとする．このとき，$g'(c)=0$ であるような点 $c\in[a,b]$ が存在する．

問題 147 10pt 解答例あり

☆ロルの定理を用いて平均値の定理を示しなさい．
（ヒント：$g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ についてロルの定理を適用する．）

問題 148 5pt 解答例あり

e^x をマクローリン展開しなさい．

問題 149 8pt 解答例あり

e^x のマクローリン展開を用いて，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}$ を計算しなさい．

問題 150 10pt 解答例あり

☆$(\sin(x))'=\cos(x)$，$(\cos(x))'=-\sin(x)$ であることをが知られている．$\sin(x)$ と $\cos(x)$ をそれぞれマクローリン展開しなさい．ただし $\sin(0)=0$，$\cos(0)=1$ である．

問題 151 10pt 解答例あり

☆$e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)$ であることを示しなさい．（これは**オイラーの公式**と呼ばれる）ただし i は $i^2=-1$ となる数（虚数単位）である．（ヒント：問題 148,150 を使う）

[*1] 微分係数が求まることを微分可能という．

[*2] 正確には連続関数であれば最小値と最大値を持つ． これを ワイエルシュトラスの（極値）定理という．微分可能な関数は連続である．

問題 152 10pt 解答例あり

☆i^i を計算しなさい．（ヒント：オイラーの公式を使う）

問題 153 2pt 解答例あり

f の定義域が実数の集合であるとする．f が極大値を取ることの定義を書きなさい．

問題 154 2pt 解答例あり

最小値の定義を書きなさい．

問題 155 1pt 解答例あり

次を満たすような微分可能な関数 f を作りなさい．「$f'(x^*)=0$ となる点があるが，この点では f は最大値も最小値も取らない．」

問題 156 1pt 解答例あり

次を満たすような微分可能な関数 f を作りなさい．「$f'(x^*)=0$ となる点があるが，この点では f は極大値も極小値も取らない．」

問題 157 3pt 解答例あり

最大値であるならば極大値であることを示しなさい．

問題 158 2pt 解答例あり

最大値が存在しないような関数 f を作りなさい．

問題 159 2pt 解答例あり

最大化解を複数持つ関数 f を作りなさい．

問題 160 3pt 解答例あり

次を満たすような微分可能な凹関数 f を作りなさい．

「f には最大値があるが，その点では $f'(x)=0$ とはならない．」（ヒント：定義域）

問題 161 2pt 解答例あり

凹関数の定義を書きなさい．

問題 162 2pt 解答例あり

$f(x)=x^{1/4}$ は凹関数だろうか．真偽及びその理由を答えなさい．

問題 163 2pt 解答例あり

$f(x) = x^3$ は凹関数だろうか．真偽及びその理由を答えなさい．

問題 164 2pt 解答例あり

$f(x) = \frac{x}{1-x}$（ただし $0 < x < 1$）は凹関数か凸関数か，あるいはそのいずれでもないか，答えなさい．

問題 165 3pt 解答例あり

$-f$ が凹関数であるならば以下の不等式をすべての x, y および $\lambda \in [0,1]$ で満たされることが同値であることを示しなさい．

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

問題 166 9pt 解答例あり

☆f が微分可能かつ凹関数であればすべての x, y について $f'(y)(x-y) \geqq f(x) - f(y)$ であることを示したい．
凹関数の定義から以下の不等式が全ての λ とすべての x, y について成立する．

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

これを変形して以下の不等式を得る．

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) - f(y) \geqq \lambda(f(x) - f(y)) \tag{11.1}$$

(a) $g(\lambda) = f(\lambda x + (1-\lambda)y)$ と定義するとき，$g(0)$ を計算しなさい．
(b) (11.1) 式の左辺が $g(\lambda) - g(0)$ と変形できることを確かめなさい．
(c) (11.1) 式の両辺を λ で割り，$\lambda \to 0$ とすることで $f'(y)(x-y) \geqq f(x) - f(y)$ であることを示しなさい．

問題 167 6pt 解答例あり

☆f が微分可能かつすべての x, y について $f'(y)(x-y) \geqq f(x) - f(y)$ であれば，f が凹関数であることを示したい．

1. $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ とおく．このとき，$x - z$ および $y - z$ を計算しなさい．
2. 1 の結果を用いて以下の不等式を示しなさい．

$$\begin{aligned}(1-\lambda)f'(z)(x-y) &\geqq f(x) - f(z)\\ -\lambda f'(z)(x-y) &\geqq f(y) - f(z)\end{aligned}$$

3. 2 の結果を用いて f が凹関数であること，つまり $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$

を示しなさい．

問題 168 5pt 解答例あり

☆f が次の条件を満たすとき，f は準凹関数であるという．

「すべての $\alpha \in [0,1]$ とすべての x, y について，$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geqq \min\{f(x), f(y)\}$ である」

ただし $\min\{a,b\}$ は a,b のうち，大きくない方を返す関数である．つまり，$a \geqq b$ であれば $\min\{a,b\} = b$ となる．このとき，f が凹関数であれば f は準凹関数であることを示しなさい．

問題 169 8pt 解答例あり

☆f が次の条件を満たすとき，f は狭義準凹関数であるという．

「すべての $\alpha \in (0,1)$ とすべての x, y について，$f(\alpha x + (1-\alpha)y) > \min\{f(x), f(y)\}$ である」

f の定義域が実数全体であり，f が狭義準凹関数でかつ微分可能であるとする．このとき，f が x^* で極大値をとるならば x^* で最大値を取ることを示しなさい．

問題 170 5pt 解答例あり

☆f が狭義準凹関数であるとする．このとき，f の最大化解があればそれは唯一つであることを示しなさい．

問題 171 5pt 解答例あり

☆f が実数を定義域とする微分可能な狭義準凹関数であるが，$f'(x^*) = 0$ かつ x^* で極大値を取らないような例を作りなさい．

問題 172 5pt 解答例あり

☆微分可能な f が次の条件を満たすとき，f は擬凹関数であるという．

「すべての x, y について $f'(x)(y-x) \leqq 0$ ならば $f(y) \leqq f(x)$ である」

このとき，$f'(x^*) = 0$ であれば f は x^* で最大値を取ることを示しなさい．

問題 173 8pt 解答例あり

ある関数 f について，すべての z について $f'(z) > 0$ であることが言える．

1. g が x で最大値を取るとき，$f(g(x))$ も x で最大値を取ることを示しなさい．またその逆も言えることを示しなさい．
2. $x > 0$ であれば $(\ln(x))' > 0$ であることを示しなさい．
3. $g(x) = e^{-x}x$ であるとき, g の最大化解を求め，なぜそうなるかを答えなさい．

問題 174 8pt 解答例あり

x が f の厳密な極大化解であるという．つまり, h が十分に小さい正の数であれば, $x-h < z < x+h$ となる $z \neq x$ について $f(x) > f(z)$ である．このとき，（f'' が連続関数であれば）$f''(x) \leqq 0$ であることを示しなさい．ただし，g が連続関数であり，$x_n \to x$ かつ $g(x_n) < 0$ であれば，$g(x) \leqq 0$ であることを利用する．

問題 175 8pt

x が f の厳密な極小化解であるという．つまり, h が十分に小さい正の数であれば, $x-h < z < x+h$ となる $z \neq x$ について $f(x) < f(z)$ である．このとき，（f'' が連続関数であれば）$f''(x) \geqq 0$ であることを示しなさい．ただし，g が連続関数であり，$x_n \to x$ かつ $g(x_n) > 0$ であれば，$g(x) \geqq 0$ であることを利用する．

問題 176 8pt 解答例あり

f'' が連続関数であるとする．もし $f'(x) = 0$ かつ $f''(x) < 0$ であれば x は f の極大化解であることを示しなさい．ただし，g が連続関数であり $g(x) < 0$ ならば，x に十分近い y について $g(y) < 0$ が言えることを利用する．

問題 177 8pt

f'' が連続関数であるとする．もし $f'(x) = 0$ かつ $f''(x) > 0$ であれば x は f の極小化解であることを示しなさい．ただし，g が連続関数であり $g(x) > 0$ ならば，x に十分近い y について $g(y) > 0$ が言えることを利用する．

問題 178 2pt 解答例あり

企業が「価格受容者」である，ということは企業がいくら生産しても価格が変化しないものだと想定しているということを意味する．つまり $P(q) = p$ と思っているということである．このとき，企業の利潤最大化条件を求めなさい．ただし費用関数 C は凸関数とする．

問題 179 2pt 解答例あり

$P(q) = 100 - 3q, C(q) = q + q^2$ であるとする．このとき，利潤最大化する q を求めなさい．

問題 180 3pt 解答例あり

$P(q) = 5, C(q) = 3q$ とする．このとき，企業の利潤を最大化する生産量 q を求めなさい．ただし，生産量は $0 \leqq q \leqq 100$ とする．

問題 181 5pt 解答例あり

$P(q) = p, C(q) = cq$ とする．このとき，企業の利潤を最大化する生産量 q を求めなさい．ただし，生産量は $0 \leqq q \leqq 100$ とする．また $c > 0$ とする．

問題 182 7pt

$P(q) = p, C(q) = cq^{1/2}$ とする．このとき，企業の利潤を最大化する生産量 q を求めなさい．ただし，生産量は $0 \leqq q \leqq 100$ とする．ただし $c > 0$ とする．

問題 183 7pt

次の関数 f の最大化解を求めなさい．ただし x の取りうる範囲は $1 \leqq x \leqq 2$ であるとする．また，$\ln 2 \approx 0.693...$ である．

$$f(x) = x - \ln x$$

問題 184 3pt

効用関数が $u(X) = X^{\frac{1}{2}}$ とする.（ただし $X \geqq 0$）この人がリスク回避的かどうかを調べなさい．

問題 185 4pt 解答例あり

効用関数が $u(X) = X^{\frac{1}{2}}$ とする.（ただし $X \geqq 0$）確率 50% で 4 万円もらえるが残りの確率で何ももらえないくじを考える．このくじの確実性等価を求めなさい．

問題 186 3pt 解答例あり

効用関数 $u(x) = e^{ax}$ について絶対的リスク回避度を求めなさい．ただし e はネイピア数である．

問題 187 3pt

効用関数 $u(x) = x^{\sigma}$ について，相対的リスク回避度を求めなさい．

問題 188 3pt

効用関数 $u(x) = \ln(x)$ について，相対的リスク回避度を求めなさい．

第 12 章

一変数関数の積分

問題 189 3pt 解答例あり

すべての x について $f'(x) > 0$ であるとする．このとき，$x > y$ なら $f(x) > f(y)$ であることを微分積分学の基本定理を使って示しなさい．

問題 190 8pt 解答例あり

次の原始関数をふたつづつ求めなさい

1. $f(x) = 0$
2. $f(x) = 1$
3. $f(x) = x^2 + 1$
4. $f(x) = x + x^3$
5. $f(x) = e^{-ax}$
6. $f(x) = 1/x^2$

問題 191 10pt

次の関数を $[a, b]$ の範囲で積分しなさい．

1. $f(x) = xe^{-x}$
2. $f(x) = x\ln(x)$
3. $f(x) = \frac{1}{x+1}$

問題 192 8pt 解答例あり

$\frac{f'(x)}{f(x)} = x$ が常に満たされているという．また，$f(a) = 1$ であるという．このとき，$f(x)$ を計算しなさい．（ヒント：対数微分を思い出すこと，両辺を積分すること）

問題 193 4pt

一様分布の期待値を計算しなさい．

問題 194 7pt

三角分布の期待値を計算しなさい．

問題 195 10pt 解答例あり

二つの確率分布 F, G があり，$F(x) \geqq G(x)$ が全ての x について成り立つとき，G は F を一次確率支配するという．このとき $\int_a^b xg(x)dx \geqq \int_a^b xf(x)dx$ であることを示しなさい．ただし $F'(x) = f(x), G'(x) = g(x)$ である．（ヒント：部分積分を用いる）

問題 196 12pt 解答例あり

$F(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx$，$G(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-n}{\sigma}\right)^2} dx$ とする．このとき，$m > n$ ならば F が G を一次確率支配することを示しなさい．
(ヒント：置換積分を用いる)

問題 197 12pt 解答例あり

$[a, b]$ 上の確率分布 F, G の密度関数をそれぞれ f, g とする．ある x^* について，$x > x^*$ ならば $f(x) > g(x)$ が成立し，$x \leqq x^*$ ならば $f(x) < g(x)$ が成り立つとする．このとき，F が G を一次確率支配することを示しなさい．

第 13 章

線形代数

問題 198 5pt 解答例あり

定義域も終域も実数の集合である関数 f, g と実数 k について，関数の和を $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$，スカラー倍を $kf(x) = k \times f(x)$ と定義する．このとき，定義域も終域も実数の集合である関数すべての集合がベクトル空間になることを示しなさい．

問題 199 5pt 解答例あり

多項式全ての集合がベクトル空間であることを示しなさい．

問題 200 2pt 解答例あり

ベクトル，$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ が一次独立であることを示しなさい．

問題 201 2pt 解答例あり

ベクトル，$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ が一次従属であることを示しなさい．

問題 202 3pt

ベクトル，$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ が一次従属であることを示しなさい．

問題 203 3pt

ベクトル，$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ が一次独立であることを示しなさい．

問題 204 3pt

ベクトル，$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ が一次従属であることを示しなさい．ただし a, b, c は実数．

問題 205 3pt 解答例あり

ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が平行であるとは $\vec{a} = t\vec{b}$ となるような実数 t が存在することを言う．成分が三つのベクトルを考える．$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が互いに平行ではないが，$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が一次従属となる例を挙げなさい．

問題 206 6pt 解答例あり

$$\begin{bmatrix} f \\ e \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

とする．ただし，$a_1, a_2, b_1, b_2 > 0$ とする．また，

$$\begin{bmatrix} f \\ e' \end{bmatrix} = x' \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + y' \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

であるとする．ただし，f, e, e', x, x', y, y' はすべて正の実数であり，$e > e'$ とする．このとき，$\frac{a_2}{a_1} > \frac{b_2}{b_1}$ ならば $x > x'$ を示しなさい．

問題 207 5pt

$$\begin{aligned} d_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ d_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ d_3 &= a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{aligned}$$

とする．このとき，この連立方程式を行列式を使って解きなさい（行列式の展開はしなくて良い）．

問題 208 3pt

逆行列の定義より $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ であることを示しなさい．（逆行列はどちらからかけても単位行列になる）

問題 209 3pt

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ という形の行列を 0 **行列**と呼ぶ．どんな 2×2 行列も 0 行列をかければ 0 行列になることを確かめなさい．

問題 210 3pt

次の行列の積を計算しなさい．

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

問題 211 3pt

AB が 0 行列になるが，A と B がともに 0 行列ではないような行列 A と B の例を作りなさい．

問題 212 3pt

$A = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ とする．ただし $a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$，$b = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ である．このとき，$AA = A$ であることを確かめなさい（このような行列はべき等行列という）．

問題 213 10pt

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ とする．AB が単位行列になるような B は存在するか考えなさい．

問題 214 5pt 解答例あり

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ とする．$\det(A) \neq 0$ であるとき，クラメールの公式を用いて逆行列を計算しなさい．（行列式の展開計算はしなくて良い）

問題 215 10pt

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$ とする．$\det(A) \neq 0$ であるとき，クラメールの公式を用いて逆行列を計算しなさい．（行列式の展開計算はしなくて良い）

問題 216 5pt 解答例あり

すべてのベクトル $\vec{a}$ について，$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ となるようなベクトル $\vec{0}$ をゼロベクトルという．すべての線形関数 f について $f(\vec{0}) = \vec{0}$ であることを示しなさい．
（ヒント: $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0}$）

問題 217 24pt 解答例あり

☆行列 A と単位行列 E について，$A\vec{x} = \lambda E\vec{x}$ となるような $\vec{x} \neq \vec{0}$ を固有ベクトル，λ を固有値と

いう．$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ とすれば

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \vec{x}$$
$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{0}$$

である．

1. このとき，$\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$ であることを示しなさい．（背理法を用いる）
2. $\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$ であることからこの行列の固有値を $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ を用いて書きなさい．
3. 固有値が二つあり，それらを λ_1, λ_2 とする．またそれに対応する固有ベクトルを $\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix}$ とする．このとき，固有ベクトル $\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix}$ が一次独立であれば

$$X^{-1} A X = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

となることを示しなさい．ただし $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{bmatrix}$ である．（これを行列の対角化と呼ぶ）
4. 3 の結果を用いて

$$AA = X \begin{bmatrix} (\lambda_1)^2 & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^2 \end{bmatrix} X^{-1}$$

であることを示しなさい．

問題 218 10pt 解答例あり

☆どんなベクトル $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ についても $(x_1, x_2) \cdot (Ax) > 0$ となるような行列を正値定符号行列と呼ぶ．（Ax がベクトルになることに注意する．$(x_1, x_2) \cdot (Ax)$ は (x_1, x_2) と (Ax) の内積である．）$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ とし，また $a_{12} = a_{21}$ であるとき，$a_{11} > 0$ かつ $\det(A) > 0$ ならば A は正値定符号行列であることを示しなさい．

問題 219 10pt

☆どんなベクトル $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ についても $x^{\top} A x < 0$ となるような行列を負値定符号行列と呼ぶ．$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ とし，また $a_{12} = a_{21}$ であるとき，$a_{11} < 0$ かつ $\det(A) > 0$ ならば A は負値定符号

号行列であることを示しなさい．

問題 220 8pt 解答例あり

☆（三角不等式）$|\vec{a}+\vec{b}| \leqq |\vec{a}|+|\vec{b}|$ であることを示したい．

1. 目的のため，以下の不等式を示すことを考える．

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \tag{13.1}$$

そのためにまず次の式を x に関して平方完成しなさい．

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i x - b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 x^2 - 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i x + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \geqq 0$$

2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i x - b_i)^2 \geqq 0$ であることから (13.1) を示しなさい．
3. (13.1) を用いて $|\vec{a}+\vec{b}| \leqq |\vec{a}|+|\vec{b}|$ を示しなさい．
   わからなければ $n=2$ のケースで考えること．

第 14 章

多変数関数の微分

問題 221 5pt 解答例あり

計算をすることで次の表を埋めなさい．

(x,y) \ $f(x,y)$	x^2y	$x+y^2$	x^y	xy	$x^{1/2}+2y^{1/2}$
$(2,3)$					
$(5,1)$					
(x^2,y^2)					
$(x+h,y)$					
$(x^3,y+2)$					

問題 222 3pt 解答例あり

次の関数を x および y で偏微分しなさい．

(a) x^2y
(b) $x+y^2$
(c) $x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$
(d) $x^{\frac{1}{2}}+2y^{\frac{1}{2}}$

問題 223 7pt 解答例あり

関数 g を次のように定義する．

$$g(a)=f(ax+(1-a)x',ay+(1-a)y')$$

この関数を二次の項までテイラー展開すると以下の通りである．

$$g(a)=g(0)+g'(0)a+\frac{g''(c)a^2}{2}$$

ただし c は $c\in(0,a)$ となるような実数である．これを計算し，$a=1$ を代入することで，二変数

関数のテイラー展開を行いなさい．

問題 224 8pt 解答例あり

1. 生産関数が $f(K,L)=K^{0.4}L^{0.5}$ であったとする．要素需要関数を求めなさい．
2. 生産関数が $f(K,L)=K^{1/2}+L^{1/2}$ であったとする．要素需要関数を求めなさい．

問題 225 8pt 解答例あり

生産関数が $f(K,L,X)=K^{0.2}L^{0.4}X^{0.3}$ であったとする．ただし K は資本，L は労働であり，また w を賃金率，r をレンタル率とする．また X は新技術の投入量であり，それを X 単位投入するには一単位あたり v だけの費用がかかるとする．要素需要関数を求めなさい．

問題 226 5pt 解答例あり

生産関数が $f(K,L,X)=K^{1/2}+L^{1/2}+X^{1/2}$ であったとする．ただし K は資本，L は労働であり，また w を賃金率，r をレンタル率とする．また X は新技術の投入量であり，それを X 単位投入するには一単位あたり v だけの費用がかかるとする．要素需要関数を求めなさい．

問題 227 3pt

1. 生産関数が $f(K,L)=K^{0.4}L^{0.5}$ であったとする．これは何次の同次関数か答えなさい．
2. 生産関数が $f(K,L)=K^{1/2}+L^{1/2}$ であったとする．これは何次の同次関数か答えなさい．

問題 228 10pt 解答例あり

1. 生産関数が $f(K,L)=K^{0.4}L^{0.5}$ であったとする．このとき $\frac{\partial K(p,r,w)}{\partial r}$ を計算しなさい．
2. 生産関数が $f(K,L)=K^{1/2}+L^{1/2}$ であったとする．このとき $\frac{\partial K(p,r,w)}{\partial r}$ を計算しなさい．

問題 229 5pt 解答例あり

二変数関数 f について，次の定理を証明しなさい．

定理　f が点 (x^*,y^*) で極大値を取るとする．このとき，以下の等式が成立する．

$$\frac{\partial f(x^*,y^*)}{\partial x}=\frac{\partial f(x^*,y^*)}{\partial y}=0$$

問題 230 7pt 解答例あり

二変数関数 f が凹関数であるとする．このとき，

$$\frac{\partial f(x^*,y^*)}{\partial x}=\frac{\partial f(x^*,y^*)}{\partial y}=0$$

が f が (x^*,y^*) で最大値を取るための必要十分条件であることを示しなさい．

問題 231 14pt 解答例あり

☆二変数関数 f について，次の行列をヘッセ行列と呼ぶ

$$H_{f(x,y)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix}$$

(a) f が凹関数であることの必要十分条件のひとつが $f(x,y) - f(x',y') \leqq \frac{\partial f(x',y')}{\partial x}(x-x') + \frac{\partial f(x',y')}{\partial y}(y-y')$ であることを用いて，f のヘッセ行列が負値定符号（問題 219 参照）であることが f が凹関数であることの十分条件であることを示しなさい．

(b) ヤングの定理によると f が 2 回連続微分可能であれば $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ である．このことから $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) < 0$ かつ $\det(H_{f(x,y)}) > 0$ が全ての x, y について成立することが f が凹関数であることの十分条件であることを示しなさい．

問題 232 5pt 解答例あり

単一財の消費者問題を考える．すべての q について $v''(q) < 0$ であるとき，$D'(p) < 0$ であることを示しなさい．

問題 233 10pt 解答例あり

関数 $f(x,a)$ について，$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,a) < 0$ であるとする．また，$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial a}(x,a) < 0$ であるとする．$x(a) = \arg\max_x f(x,a)$ とするとき，$x'(a)$ を計算し，その符号が正か負かを述べなさい．

第 15 章

制約付き最適化問題

問題 234 5pt 解答例あり

効用関数が $u(q_x, q_y) = (q_x)^{1/3}(q_y)^{2/3}$ であったとする．このときマーシャルの需要関数を求めなさい．

問題 235 5pt 解答例あり

効用関数が $u(q_x, q_y, q_z) = (q_x)^{1/2}(q_y)^{1/3}(q_z)^{1/6}$ であったとする．このときマーシャルの需要関数を求めなさい．

問題 236 10pt 解答例あり

次のような制約付き問題を考える．

$$\begin{aligned} &\max_{x_1,x_2,x_3,x_4} (x_1)^{\frac{1}{10}}(x_2)^{\frac{2}{10}}(x_3)^{\frac{3}{10}}(x_4)^{\frac{4}{10}} \\ &\text{s.t. } x_1 + x_2 = 3, \quad x_3 + x_4 = 7 \end{aligned}$$

このときの最大化解 x_1, x_2, x_3, x_4 を求めなさい．

問題 237 15pt

次のような制約付き問題を考える．

$$\begin{aligned} &\max_{x_1,x_2,x_3,x_4} (x_1)^{\frac{1}{10}}(x_2)^{\frac{2}{10}}(x_3)^{\frac{3}{10}}(x_4)^{\frac{4}{10}} \\ &\text{s.t. } x_1 + x_2 = 10, \quad x_3 + x_4 = 10, \quad x_2 + x_3 = 10 \end{aligned}$$

このときの最大化解 x_1, x_2, x_3, x_4 を求めなさい．

問題 238 15pt

次のような制約付き問題を考える．

$$\max_{x_1,x_2,x_3,x_4} (x_1)^{\frac{1}{10}}(x_2)^{\frac{2}{10}}(x_3)^{\frac{3}{10}}(x_4)^{\frac{4}{10}}$$
$$\text{s.t. } x_1+2x_2+x_3=10, \quad x_2+3x_3+x_4=5$$

このときの最大化解 x_1,x_2,x_3,x_4 を求めなさい．

問題 239 7pt 解答例あり

次のような問題を考える．効用を一定水準 u に保ったまま，支出 $p_xq_x+p_yq_y$ を**最小化**するような消費計画を考えたい．

(a) 上のような最適化問題を解くためのラグランジュ関数を作りなさい．（ヒント：f を最小化したければ $-f$ を最大化すれば良い．）
(b) ラグランジュ関数を微分することで支出を最小化する消費計画を求めなさい．ただし効用関数を $u(q_x,q_y)=q_x^{1/3}q_y^{2/3}$ とする．

問題 240 7pt

次のような問題を考える．生産量を一定水準 q に保ったまま，支出 $wL+rK$ を最小化するような生産要素の量を考えたい．

(a) 生産関数が $f(K,L)=K^\alpha L^\beta$ だとする．上のような最適化問題を解くためのラグランジュ関数を作りなさい．
(b) ラグランジュ関数を微分することで支出を最小化するような生産要素の量 K,L を求めなさい．
(c) (b) で求めた K,L を支出 $wL+rK$ に代入することで q の関数としての支出（つまり費用関数）を求めなさい．

問題 241 10pt

☆次のような制約付き最大化問題を考える．

$$\max_{x_1,x_2} x_1+2x_2$$
$$\text{s.t. } 3x_1+x_2 \leqq 10, x \geqq 0, y \geqq 0$$

このときの最大化解 x_1,x_2 を求めなさい．

問題 242 8pt 解答例あり

☆次のような制約付き最大化問題を考える.

$$\begin{aligned}&\max_{x,y} x+2y\\&\text{s.t. } x^2+y^2 \leqq 1, x+y \leqq 2, x+y \geqq \sqrt{2}, x \geqq 0, y \geqq 0.\end{aligned}$$

このときの最大化解 x, y を求めなさい.

問題 243 5pt 解答例あり

☆次のような制約付き最大化問題を考える.

$$\begin{aligned}&\max_{x_1,x_2} \ln(x_1)+2\ln(x_2)\\&\text{s.t. } x_2+x_3 \leqq 10, x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0\end{aligned}$$

このときの最大化解 x_1, x_2 を求めなさい.

問題 244 3pt 解答例あり

☆次のような制約付き最大化問題を考える.

$$\begin{aligned}&\max_{x_1,x_2} -(x_1-1)^2-(x_2-1)^2\\&\text{s.t. } 3x_1+x_2 \leqq 10, x \geqq 0, y \geqq 0\end{aligned}$$

このときの最大化解 x_1, x_2 を求めなさい.

問題 245 8pt

☆次のような制約付き最大化問題を考える.

$$\begin{aligned}&\max_{x_1,x_2} -(x_1-1)^2-(x_2-1)^2\\&\text{s.t. } x_1+x_2 \leqq 1, x \geqq 0, y \geqq 0\end{aligned}$$

このときの最大化解 x_1, x_2 を求めなさい.

問題 246 10pt

☆次のような制約付き最大化問題を考える.

$$\begin{aligned}&\max_{x_1,x_2} x_1^{1/2}+x_2\\&\text{s.t. } x_1+x_2 \leqq 1, x \geqq 0, y \geqq 0\end{aligned}$$

このときの最大化解 x_1, x_2 を求めなさい.

問題 247 6pt 解答例あり

包絡線定理を用いて，間接効用関数を p_x で微分しなさい．また，これを用いて需要関数を間接効用関数を偏微分したものの式で表しなさい．

問題 248 10pt 解答例あり

☆効用を一定水準 u に保ったまま，支出 $p_xq_x + p_yq_y$ を**最小化**するような消費計画のことをヒックスの需要関数という．ヒックスの需要関数を支出，$p_xq_x + p_yq_y$ に代入したものを**支出関数**と呼ぶ． 支出関数を価格 p_x で微分したものを求めなさい．

問題 249 10pt 解答例あり

☆効用関数 $u(q_1, q_2)$ が一次同次関数であるとする．このとき，間接効用関数 $v(p_1, p_2, I)$ が I に関して一次同次であることを示しなさい．

問題 250 20pt 解答例あり

2 財を消費する消費者の効用最大化問題を考える．効用関数は $u(q_1, q_2) = \frac{1}{3}\ln(q_1) + \frac{2}{3}\ln(q_2)$ である．ただし第 1 財の消費量は q_1，第 2 財の消費量は q_2 である．また第 1 財の価格は p_1，第 2 財の価格は p_2 であり，所得は I とする．いま，それぞれの財に t_1, t_2 だけの従価税を課すとする．つまり消費者の支払額は $(1 + t_1)p_1q_1 + (1 + t_2)p_2q_2$ となる．また，$c_i = p_i(1 + t_i)$ とする．

(a) 消費者の効用最大化問題を解き，第 1 財と第 2 財の需要関数を c_1, c_2 を使ってそれぞれ求めなさい．

(b) 消費者の効用最大化問題のラグランジュ乗数の値を求めなさい．

(c) t_1 で消費者の間接効用関数を微分したときの値を求めなさい．

(d) t_2 で消費者の間接効用関数を微分したときの値を求めなさい．

(e) いま，税金を決める政府の目的関数が以下の通りであるとする．

$$u(q_1^*, q_2^*) + \alpha(t_1p_1q_1 + t_2p_2q_2)$$

これを最大化するような t_1, t_2 を求めたい．この最適な税率 t_1, t_2 について，$|\frac{p_1}{q_1}\frac{\partial q_1}{\partial c_1}| < |\frac{p_2}{q_2}\frac{\partial q_2}{\partial c_2}|$ ならば $t_1 > t_2$ であることを示しなさい．
ただし $1/I < \alpha$ であるとする．

問題 251 15pt 解答例あり

☆消費者が二人（アダムとイブ）がいるとする．アダムの効用関数は $u_ア(q_{アx}, q_{アy}) = (q_{アx})^{1/4}(q_{アy})^{1/4}$ であり，イブの効用関数は $u_イ(q_{イx}, q_{イy}) = (q_{イx})^{1/6}(q_{イy})^{1/3}$ であるとする．アダムの初期保有は $(e_{アx}, e_{アy}) = (0, 4)$, イブの初期保有は $(e_{イx}, e_{イy}) = (2, 0)$ であるとする．

1. 与えられた価格において，アダムの需要関数を求めなさい．
2. 与えられた価格において，イブの需要関数を求めなさい．
3. ワルラス均衡配分を求めなさい

問題 252 15pt

☆消費者が二人（ケンとジェラール）がいるとする．ケンの効用関数は $u_{ケ}(q_{ケx}, q_{ケy}) = (q_{ケx})^{2/3}(q_{ケy})^{1/2}$ であり，ジェラールの効用関数は $u_{ジ}(q_{ジx}, q_{ジy}) = (q_{ジx})^{1/2}(q_{ジy})^{1/4}$ であるとする．ケンの初期保有は $(e_{ケx}, e_{ケy}) = (1, 2)$, ジェラールの初期保有は $(e_{ジx}, e_{ジy}) = (2, 1)$ であるとする．

1. 与えられた価格において，ケンの需要関数を求めなさい．
2. 与えられた価格において，ジェラールの需要関数を求めなさい．
3. ワルラス均衡配分を求めなさい．

第 16 章

動学システムと最適化

問題 253 10pt 解答例あり

蜘蛛の巣過程を考える．初日の価格を p_1, 需要関数を $D(p) = 10 - ap$, 供給関数を $S(p) = bp + 5$ とする．t 日目の供給量は $t-1$ 日目の価格をもとに決まり，t 日目の価格はその価格における需要量が t 日目の供給量に等しくなるように決まる．

1. p_t を a, b, p_{t-1} を用いて計算しなさい．
2. 蜘蛛の巣過程の不動点 (つまり市場均衡) を計算しなさい．
3. 2 で求めた蜘蛛の巣過程の不動点が局所安定であるための条件を a, b を用いて述べなさい．

問題 254 10pt

次の価格調整過程を考える．初日の価格を p_1, 需要関数を $D(p) = 8 - ap$, 供給関数を $S(p) = bp + 3$ とする．t 日目の需要と供給は $t-1$ 日目の価格をもとに決まり，t 日目の価格は $t-1$ 日目の価格に $D(p_{t-1}) - S(p_{t-1})$ を足すことで決まる．

1. p_t を a, b, p_{t-1} を用いて計算しなさい．
2. この価格調整過程の不動点 (つまり市場均衡) を計算しなさい．
3. 2 で求めた価格調整過程の不動点が局所安定であるための条件を a, b を用いて述べなさい．

問題 255 4pt 解答例あり

$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{if} \quad x \leqq 1 \\ 4 - 2x & \text{if} \quad x > 1 \end{cases}$ を考える．3 周期点をひとつ見つけなさい．

問題 256 5pt

5 周期点をもつ関数をひとつ挙げ，その 5 周期点を明示しなさい．

問題 257 25pt 解答例あり

$u(x) = x^{1/2}$ であり，また $0 < \delta < 1$ であるとする．

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2, \ldots} \ & u(x_1) + \delta u(x_2) + \delta^2 u(x_3) + \cdots + \delta^k u(x_{k+1}) + \cdots \\ \text{s.t. } & x_1 + x_2 + \cdots = A, \quad 0 \leqq x_i \leqq A \ (\forall i = 1, 2, \ldots) \end{aligned} \tag{16.1}$$

とするとき，(16.1) の最大化解 $x_1, x_2, \ldots$ を求めたい．

1. ベルマン方程式を書きなさい．
2. すべての a について $W_0(a) = 0$ という関数を考える．これを使って，$W_1(A) = \max_x \{u(x) + \delta W_0(A - x)\}$ と W_1 を定義する．W_1 を求めなさい．
3. 2 で求めた W_1 を使って，$W_2(A) = \max_x \{u(x) + \delta W_1(A - x)\}$ と W_2 を定義する．W_2 を求めなさい．
4. W_2 から価値関数を「推測」し，ベルマン方程式を解きなさい．
5. (16.1) の最大化解 $x_1, x_2, \ldots$ を求めなさい．

問題 258 25pt

$u(x) = x^{3/4}$ とする．

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2, \ldots} \ & u(x_1) + \delta u(x_2) + \delta^2 u(x_3) + \cdots + \delta^k u(x_{k+1}) + \cdots \\ \text{s.t. } & x_1 + x_2 + \cdots = A, \quad 0 \leqq x_i \leqq A (\forall i = 1, 2, \ldots) \end{aligned} \tag{16.2}$$

とするとき，(16.2) の最大化解 $x_1, x_2, \ldots$ を求めなさい．

第 17 章

追加問題

第一刷時追加分

以降，もし増刷すれば解答例か新しい問題を追加するかもしれません．

基礎の計算

問題 259 5pt

b と d，および $b+d$ が 0 でないとする．以下のように式変形できるとき，x の値を求めなさい．できない場合はその理由を答えなさい．

$$\frac{a+c}{b+d} = x\frac{a}{b} + (1-x)\frac{c}{d}$$

論理と集合

問題 260 8pt

次のうち，どんな集合 A, B および要素 a についても偽といえるものを選びなさい．それ以外については真になるような A, B および要素 a の例を挙げなさい．

1. $A \cup B \subset A \cap B$
2. $A \cup B = A$
3. $a \in \emptyset$
4. $A \subset \emptyset$
5. $((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \setminus (A \cap B) = \emptyset$

不等式

問題 261 7pt

次の x, y に関する連立不等式を考える．

$$\begin{cases} ax + by - c \geqq 0 \\ dx + ey - f \geqq 0 \end{cases}$$

ただし，a, b, c, d, e, f は定数である．(x_1, y_1) と (x_2, y_2) が上記の連立不等式を満たしているとする．また $0 \leqq \alpha \leqq 1$ をみたすような α について，$x_3 = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, y_3 = \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2$ とする．このとき (x_3, y_3) もこの連立不等式を満たすことを示しなさい．

関数

問題 262 3pt

次の命題の真偽を答えなさい

1. f, g が一次関数であるとき，$f \circ g$ も一次関数である．
2. f, g が一次関数であるとき，$f \circ g = g \circ f$ である．
3. f が一次関数であるとき，すべての x, y について $f(x+y) = f(x) + f(y)$ である．

問題 263 15pt 解答例あり

☆f は定義域と終域を有限個の要素からなる集合 A とする関数である．ただし f はすべての $x < y$ となる x, y について $f(x) < f(y)$ を満たすという．このとき $f(x^*) = x^*$ となる $x^* \in A$ が存在することを示しなさい．ただし集合 $\{x \in A : f(x) \geqq x\}$ と $\{x \in A : f(x) \leqq x\}$ はそれぞれ空集合でなければ最大値及び最小値を持つことを利用する．

二次関数

問題 264 3pt

次の命題の真偽を答えなさい

1. f, g が二次関数であるとき，$f \circ g$ も二次関数である．
2. f を二次関数とし，$f(x) \geqq 0$ がすべての $x \geqq 0$ について成り立つとする．このとき，$f(x)$ は $x \geqq 0$ の範囲で逆関数を持つ．

問題 265 4pt

$a > 0$ であり，$f(x) = -a(x-\alpha)(x-\beta)$ であるとき，f の最大化解が $\frac{\alpha+\beta}{2}$ であることを示しなさい．

数列と極限

問題 266 15pt

貯蓄と経済成長のモデルを考える（ソローモデルと呼ばれるものの簡略化版である）．最初の日に x_1 だけの資源があるとする．その資源のうち，消費するものと将来の投資にするものに分ける．k だけ投資すれば次の日に $f(k) = k^a$ だけの資源が得られるとする．ただし $0 < a < 1$ とする．

1. t 日目の資源を x_t で表すとする．t 日目の投資額が sx_t で表せるとき，x_{t+1} を x_t と s と a だけを使って表しなさい．ただし $0 < s < 1$ とする（この s は貯蓄率と呼ばれる)．
2. 1 で得られた式の両辺の対数を取りなさい．
3. $y_{t+1} = \ln(x_{t+1})$ とするとき，y_{t+1} を s と a と t と x_0 だけを使って表しなさい．
4. $\lim_{t\to\infty} y_t$ を求めなさい．
5. $\lim_{t\to\infty} x_t$ を求めなさい．
6. t 日目の消費量を c_t とするとき，これを x_t をつかって求めなさい．
7. $\lim_{t\to\infty} c_t$ を求めなさい．
8. $\lim_{t\to\infty} c_t$ を最大にするような貯蓄率 s を求めなさい．

問題 267 10pt

$f(x)$ という関数は次の性質を満たす．

- $|f(x) - f(y)|^2 = |x - y|$

このとき，次の問いに答えなさい．

1. $t_0 = 0$ かつ $t_k = t_{k-1} + \frac{t}{n}$ とする．このとき，$\sum_{k=1}^{n} t_k - t_{k-1} = t$ を示しなさい．
2. 次の極限を計算しなさい．

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})|^2$$

3. 次の不等式を示しなさい．

$$\sum_{k=0}^{n} |f(t_{k+1}) - f(t_k)|^2 \leqq \max_j |f(t_{j+1}) - f(t_j)| \sum_{k=0}^{n} |f(t_{k+1}) - f(t_k)|$$

4. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}|f(t_{k+1})-f(t_k)|=\infty$ を示しなさい．

問題 268 14pt 解答例あり

☆有理数とは整数の比で書くことができる数のことである． 正の実数 $x>0$ を考える．すべての正の実数 $\varepsilon>0$ について，$|x-y|<\varepsilon$ となるような有理数 y が存在することを示したい．$n>x>0$ となるような整数 n を見つけることができることから，次の数列を考える．

- k を整数とし，すべての整数 $0\leqq\ell\leqq k$ について，$a_\ell^k=\frac{n\ell}{k}$.

1. すべての整数 ℓ について, a_ℓ^k が有理数であることを示しなさい．
2. すべての整数 ℓ について，$\lim_{k\to\infty}|a_\ell^k-a_{\ell+1}^k|\to 0$ を示しなさい．
3. すべての整数 k について，$a_\ell^k\leqq x\leqq a_{\ell+1}^k$ となる ℓ が存在することを示しなさい．
4. すべての正の実数 $\varepsilon>0$ について，$|x-y|<\varepsilon$ となるような有理数 y が存在することを示しなさい．

問題 269 14pt 解答例あり

☆有理数とは整数の比で書くことができる数のことである．逆に無理数とはそうでない数である．正の実数 $x>0$ を考える．すべての正の実数 $\varepsilon>0$ について，$|x-y|<\varepsilon$ となるような無理数 y が存在することを示したい．今，$\sqrt{2}$ が無理数であることを利用する．

1. $x>\sqrt{2}/n$ となるような n が存在することを示しなさい．
2. $\frac{m}{n}\sqrt{2}>x$ となるような m が存在することを示しなさい．
3. $\frac{m}{n}\sqrt{2}>x>\sqrt{2}/n$ となるような整数 n を見つけることができることからつぎの数列を考える．
   - k を m より大きい整数とし，すべての整数 $1\leqq\ell\leqq k$ について，$a_\ell^k=\frac{m\ell}{kn}\sqrt{2}$.

   すべての整数 ℓ について, a_ℓ^k が無理数であることを示しなさい．
4. すべての整数 ℓ について，$\lim_{k\to\infty}|a_\ell^k-a_{\ell+1}^k|\to 0$ を示しなさい．
5. すべての k について，$a_\ell^k\leqq x\leqq a_{\ell+1}^k$ となる ℓ が存在することを示しなさい．
6. すべての正の実数 $\varepsilon>0$ について，$|x-y|<\varepsilon$ となるような無理数 y が存在することを示しなさい．

問題 270 14pt

☆有理数とは整数の比で書くことができる数のことである．逆に無理数とはそうでない数である．負の実数 $x<0$ を考える．すべての正の実数 $\varepsilon>0$ について，$|x-y|<\varepsilon$ となるような有理数 y および $|x-z|<\varepsilon$ となる無理数 z が存在することを示しなさい．

確率

問題 271　10 pt

$x_1, \dots, x_n$（ただし $x_1 < \cdots < x_n$）について，x_i が起きる確率を $P(x_i)$ とする．期待値を $\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i)$，二乗の期待値を $\tau = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 P(x_i)$ と置く．このとき，次の不等式を示したい．

$$\mu^2 < \tau$$

（$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 P(x_i) > 0$ を計算すれば簡単だが，ここでは別の方法を考えている．）

1. 次の等式が成立することを確かめなさい．
$$\mu^2 - \tau = \sum_{i=1}^{n} x_i(\mu - x_i)P(x_i)$$
2. $x_k < \mu < x_{k+1}$ となる k があったとする．このとき，次の不等式を示しなさい．
$$\sum_{i=1}^{k} x_i(\mu - x_i)P(x_i) < \sum_{i=1}^{k} \mu(\mu - x_i)P(x_i)$$
3. $x_k < \mu < x_{k+1}$ となる k があったとする．このとき，次の不等式を示しなさい．
$$\sum_{i=k+1}^{n} x_i(\mu - x_i)P(x_i) < \sum_{i=k+1}^{n} \mu(\mu - x_i)P(x_i)$$
4. $\sum_{i=1}^{n} \mu(\mu - x_i)P(x_i) = 0$ を示しなさい．
5. $\mu^2 < \tau$ を示しなさい．

問題 272　6pt

表が出る確率が p であるコインを使った次のゲームがある．このゲームには状態, A, B の二つがあり，次の性質を満たすという．

状態 A　コインを投げて表が出ると状態 B になるが，裏が出ると状態 A のままであり, y 円の賞金が出る．

状態 B　コインを投げて表が出ると状態 A になるが，裏が出るとゲームが終了し，x 円の賞金が出る．

またコインを複数回投げるとき，表が出る確率は互いに独立であるとする．

1. 最初が状態 A であったとする．このとき，コインを 2 回投げてゲームが終了する確率を求めなさい．

2. このゲームの期待値を計算することを考える．状態 A でいることの "価値" を考える．これを V と置く．また，状態 B でいることの価値を考える．これを U と置く．
   (a) V の値は表が出ると B の価値 U が得られ，裏が出ると A の価値 V と賞金 y の合計額が出るというくじの期待値と考える．このとき，以下の方程式が成立する．以下の空欄を埋めなさい．

$$V = p \cdot \boxed{} + (1-p) \cdot \left(\boxed{} \right) \tag{17.1}$$

   (b) U の値は表が出ると A の価値 V が得られ，裏が出るとゲームが終了し，賞金 x が出るというくじの期待値と考える．このとき，以下の方程式が成立する．以下の空欄を埋めなさい．

$$U = p \cdot \boxed{} + (1-p) \cdot \boxed{} \tag{17.2}$$

   (c) (17.1) 式と (17.2) 式を連立させて，U, V の値を求めなさい．
   (d) 状態 A から始まるゲームと状態 B から始まるゲームのどちらが良いか，理由と共に答えなさい．

連続関数

問題 273 5pt

☆f が連続であるとする． $f(x) < 0$ であれば x に十分近い y について，$f(y) < 0$ であることを示したい．そのために背理法を用いて，x にどれだけ近くても，$f(y) \geqq 0$ となる y を見つけられるとする．上の前提のもとではどんな n についても $|x-y| < 1/n$ を満たし，$f(y) \geqq 0$ となる y が見つけられる．このような y を y_n と名付けるとき，$y_n \to x$ である．

1. このとき，$\lim_{n\to\infty} f(y_n)$ を求めなさい．
2. 1 の結果はどのような前提と矛盾するといえるか，答えなさい．

問題 274 8pt

☆連続関数の極限が連続関数とは限らないことを確かめたい．そのため，定義域を $[0,1]$ とし，関数 f_a として，$f_a(x) = x^a$ を考える．これは紛れもなく連続関数である．

1. $x < 1$ のとき，$\lim_{a\to\infty} f_a(x)$ を計算しなさい．
2. $x = 1$ のとき，$\lim_{a\to\infty} f_a(x)$ を計算しなさい．
3. 「すべての $x \in [0,1]$ について $\lim_{a\to\infty} f_a(x) = f(x)$」となる不連続関数 f を示しなさい．

一変数関数の微分

問題 275 5pt 解答例あり

次の関数を微分しなさい．(ヒント：微分する前に簡単に出来ないか考える)

1. $f(x) = \dfrac{e^{\ln(x)}}{x}$
2. $f(x) = \dfrac{x}{g^{-1}(g(x))}$ （ただし g は逆関数が定義できる関数）
3. $f(x) = (1-x)x\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ （ただし $0 < x < 1$）
4. $f(x) = \ln(x^{\frac{1}{\ln(x)}})$
5. $f(x) = e^x \cdot e^{-2x} \cdot e^x$

問題 276 5pt

次の関数を微分しなさい．(ヒント：微分する前に簡単に出来ないか考える)

1. $f(x) = \dfrac{3x^2}{g^{-1}(g(x))}$ （ただし g は逆関数が定義できる関数）
2. $f(x) = (1-x)\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ （ただし $0 < x < 1$）
3. $f(x) = \ln(x^{\frac{2}{\ln(x)}})$
4. $f(x) = e^x \cdot e^{-3x} \cdot e^x$

問題 277 7pt 解答例あり

$x > y > 0$ ならば $\ln(x) > \ln(y)$ であることを示しなさい．またこの事実を用いて $a > 1$ ならば $\ln(a) > 0$ を示しなさい．（ヒント：微分と問題 189 を使うと簡単）

問題 278 7pt 解答例あり

$a > 1$ のとき，$x > y$ ならば $a^x > a^y$ であることを示しなさい．

問題 279 5pt

$f(x) = \log_a x$ を x について微分しなさい．またこれにより $a > 1$ のとき，$x > y$ ならば $\log_a x > \log_a y$ であることを示しなさい．（ヒント: 問題 80）

問題 280 10pt

微分可能な関数 f, g について，$g(b) - g(a) \neq 0$ かつすべての x について $g'(x) \neq 0$ であるとき，

関数 j を以下のように定める．

$$j(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\frac{g(x)-g(a)}{b-a}$$

このとき，この関数 j にロルの定理を用いて，以下のような c（c は a と b の間の数）が存在することを示しなさい（これはコーシーの平均値の定理と呼ばれる）．

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

問題 281 10pt 解答例あり

連続微分可能な関数 f, g を考える．今，$x \neq a$ について $g'(x) \neq 0$ であり，$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が定義できるとする． $f(a) = g(a) = 0$ であるとき，以下の等式を示しなさい．

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ヒント: $f(a) = g(a) = 0$ なので $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$ である．このときに問題 280 の結果を使う．

問題 282 15pt

☆微分可能であるが連続微分可能でない（つまり f' が連続関数でない）ような関数を作りたい．そのために次の関数 f を考える．

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x) & \text{if} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{if} \quad x = 0 \end{cases}$$

ただし $\sin(x)$ は以下のような性質を満たす関数であることを利用する（それ以外の知識は不要である）．

a. $\sin(x)$ を微分すると $\cos(x)$ になる．
b. $\cos(y)$ は $y \to \infty$ のとき，収束せずに振動する．（$\cos(y)$ は 1 から -1 の間の値を繰り返す関数である．
c. すべての y について $-1 \leqq \sin(y) \leqq 1$ である．

このとき，以下の問いに答えることで，関数 f が微分可能であるが連続微分可能でないことを示しなさい．

1. $x \neq 0$ のとき，$f'(x)$ を計算しなさい．
2. $x \to 0$ のとき，$f'(x)$ が振動することを示しなさい．
3. $x = 0$ のとき，すべての $h \neq 0$ について，以下を示しなさい．

$$-|h| \leqq \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqq |h|$$

4. 3 の結果を用いて $f'(0) = 0$ であることを示しなさい．

問題 283 8pt

☆次の極限を計算したい．

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2 \sin(1/x)}$$

問題 282 を参考にし，以下の問いに答えなさい．

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2 \sin(1/x)} = \infty$ を示しなさい．
2. $g(x) = x^2 \sin(1/x)$ を微分しなさい．
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{g'(x)}$ が振動することを示しなさい．
4. $f(0) = g(0) = 0$ であるが，$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \neq \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ となるような例を作りなさい．

問題 284 8pt

☆f を凹関数であり，$a < b < c$ となる点を取る．このとき，次の不等式を示したい．

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geqq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \geqq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

凹関数の定義は以下の不等式がすべての x, y と $\lambda \in [0, 1]$ について成立することであることに注意する．

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geqq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) \tag{17.3}$$

1. $b = \lambda a + (1 - \lambda)c$ とおく．このとき，$b - a = (1 - \lambda)(c - a)$ であることを示しなさい．
2. 凹関数の定義における x を a, y を c とおき，$b = \lambda a + (1 - \lambda)c$ と考える．このとき (17.3) の両辺から $f(a)$ を引き，両辺を $b - a$ で割ることで次の不等式を示しなさい．
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geqq \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$$
3. $b = \lambda a + (1 - \lambda)c$ とおく．このとき，$b - c = \lambda(c - a)$ であることを示しなさい．
4. 凹関数の定義における x を a, y を c とおき，$b = \lambda a + (1 - \lambda)c$ と考える．(17.3) の両辺に -1 をかけ，$f(c)$ を足し，両辺を $c - a$ で割ることで次の不等式を示しなさい．
$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \geqq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

問題 285 18pt

☆f を凹関数とする．定義域を $[0,1]$ としたとき，f が $(0,1)$ の範囲で連続であることを示したい．そのために f が不連続であるとして矛盾を導きたい．f が不連続であるとすれば，ある点 $a \in (0,1)$ について，$x_t \to a$ であるにもかかわらず $f(x_t) \neq f(a)$ となることがある．そのような数列がすべての t について $x_t < a$ を満たすとする．

1. $\lim_{t\to\infty} f(x_t) = b < f(a)$ のケースを考える．$x_t \to a$ であり，$f(x_t) \to f(a)$ でないことから，$x_t = a$ にはならない．このことを用いて，すべての t について，$x_t < \frac{x_t+a}{2} < x_{t'} < a$ となるような $t' > t$ が存在することを示しなさい．
2. 1 で見つけた t' について $x_{t'} = \lambda_t a + (1-\lambda_t)x_t$ とすれば，凹関数の定義から $f(x_{t'}) \geqq \lambda_t f(a) + (1-\lambda_t)f(x_t)$ であることを示しなさい．
3. 2 で定めた λ_t について，$\lambda_t > 1/2$ であることを示しなさい．
4. 1 の設定において，$t \to \infty$ とするとき，$b > f(a)$ となることを示し，これが前提に矛盾することを示しなさい．
5. $\lim_{t\to\infty} f(x_t) = b > f(a)$ のケースを考える．$\frac{x_t+y_t}{2} = a$ となるような y_t を考える．$x_t \to a$ となるとき，$y_t \to a$ であることを確かめなさい．
6. 5 で考えた y_t について，$\lim_{t\to\infty} f(y_t) < f(a)$ であることを確かめなさい．
7. 6 の結果から 1〜3 と同じ方法を用いて矛盾を示しなさい．
8. この証明において $a \in (0,1)$ であることがどこで使われているか指摘しなさい．

問題 286 8pt

f が厳密な凸関数であるとは $f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ がすべての x, y と $\lambda \in (0,1)$ について成り立つことである．f が厳密な凸関数で定義域が $[0,1]$ であるとき，f の最大化解は存在すれば 0 か 1 であることを示しなさい．

問題 287 6pt

お金を借りるとき，次のプランがある．

プラン 1: 利子率 r_1 で t_1 年，利子率 r_2 で t_2 年，x 万円借りる．ただし $r_1 \neq r_2$
プラン 2: 利子率 r で t_1+t_2 年，x 万円借りる．ただし，$r = \frac{t_1}{t_1+t_2}r_1 + \frac{t_2}{t_1+t_2}r_2$

1. プラン 1 において，t_1+t_2 年後の返済額はいくらか答えなさい．
2. 1 で答えた額の対数を取り，t_1+t_2 で割りなさい．
3. プラン 2 において，t_1+t_2 年後の返済額はいくらか答えなさい．
4. 3 で答えた額の対数を取り，t_1+t_2 で割りなさい．
5. $\ln(1+r)$ が r について，凹関数であることを示しなさい．
6. $\ln(1+r)$ が r について，凹関数であることを用いて，プラン 1 とプラン 2 のどちらが返済額が大きくなるか答えなさい．

問題 288 12pt

すべての x について，$f'''(x) > 0$ とする．このとき，$a \geqq b$ ならば以下の不等式が成り立つことを示したい．

$$\frac{f'(a)+f'(b)}{2} \geqq \frac{f(a)-f(b)}{a-b} \tag{17.4}$$

1. テイラー展開より次の等式が成立するような c_1, c_2 が存在することに注意する．

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(a) + f''(a)(b-a)/2 + f'''(c_1)(b-a)^2/6$$
$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = f'(b) + f''(b)(a-b)/2 + f'''(c_2)(a-b)^2/6$$

   $g(a) = \frac{f'(a)+f'(b)}{2} - \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$ とする．$\lim_{a \to b} g(a) = 0$ であることを示しなさい．
2. $g'(a) > 0$ を示しなさい．
3. 1,2 から $a \geqq b$ ならば (17.4) が成り立つことを示しなさい．

問題 289 8pt

$a = a_1 + a_2, b = b_1 + b_2$ とする．このとき，f が凹関数であれば次の不等式が成り立つことを示しなさい（ヒント：問題 259）．

$$\sum_{i=1}^{2} a_i f\left(\frac{a_i}{b_i}\right) \leqq af\left(\frac{a}{b}\right)$$

問題 290 10pt

$x > 0$ としたとき，$\lim_{x \to 0} x\ln(x) = 0$ を示したい．

1. ln が凹関数であることを示しなさい．
2. ln が凹関数であることから，すべての $b > 0$ について，$\ln(x+b) \leqq \ln(x) + \frac{b}{x}$ を示しなさい．
3. $x < 1$ であれば $\ln(x) < 0$ であることを用いて，$-b + x\ln(x+b) \leqq x\ln(x) \leqq 0$ であることを示しなさい．
4. すべての $b > 0$ について，$\lim_{x \to 0} x\ln(x+b) = 0$ を示しなさい．
5. 上記の結果を用いて，$\lim_{x \to 0} x\ln(x) = 0$ を示しなさい．

問題 291 10pt

$x > 0$ としたとき，$\lim_{x \to 0} x^x = 1$ を示したい．

1. $0 < y < 1$ のとき，$f(x) = x^y$ が凹関数であることを示しなさい．
2. f が凹関数であることを用いて，$(x+b)^y \leqq x^y + yx^{y-1}b$ であることを示しなさい．
3. 2 の結果を用いて，すべての $b > 0$ について，$x^x \geqq \frac{(x+b)^x}{1+b}$ であることを示しなさい．

4. $0 < x < 1$ のとき，$x^x \leqq 1$ であることを示しなさい．
5. 上記の結果を用いて，$\lim_{x \to 0} x^x = 1$ を示しなさい．

問題 292 6pt 解答例あり

ある財を一個購入することを考えている人（買い手）がいる．この買い手に財を売ることを考える．F を確率分布としたとき，買い手が財から得られる効用が x 以下である確率は $F(x)$ であるという．買い手は効用が請求金額以上なら買ってくれ，そうでないなら買ってくれない．いま請求金額を y とすることを考える．

1. 売上金額の期待値を最大にするような請求金額 y を求めるための一階条件が $y = \frac{1-F(y)}{f(y)}$ であることを確かめなさい．
2. $\frac{1-F(y)}{f(y)}$ が y について減少的であるとき，売上金額の期待値が y についての対数凹関数であることを示しなさい．

問題 293 15pt 解答例あり

☆$x(a) = \arg\max_x f(x, a)$ とする．ただし，複数ある場合は大きい値をとるとする（つまり正確には $x(a) = \max(\arg\max_x f(x, a))$）．このとき，$f$ は x についても a についても微分可能であるが，$x(a)$ が不連続であるような f の例を作りなさい．ただし定義域は自由に設定して良い．

一変数関数の積分

問題 294 10pt

1. $\int_0^1 ax^{a-1}dx$ を計算しなさい．
2. $\lim_{a \to 0} \int_0^1 ax^{a-1}dx$ を計算しなさい．
3. $\int_b^1 \lim_{a \to 0} ax^{a-1}dx$ を計算しなさい．
4. 3 で得た結果を用いて $\lim_{b \to 0} \int_b^1 \lim_{a \to 0} ax^{a-1}dx$ を計算しなさい．

※ 2024-7-4 問題修正

問題 295 5pt 解答例あり

すべての x について，$f(-x) = -f(x)$ であるという．このとき，すべての $a > 0$ について，以下の等式を示しなさい．

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

ただし，$-\infty < \int_0^a f(x)dx < \infty$ とする．

問題 296 5pt

すべての x について，$f(-x) = f(x)$ であるという．このとき，すべての $a > 0$ について，以下の等式を示しなさい．

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

ただし，$-\infty < \int_0^a f(x)dx < \infty$ とする．

問題 297 18pt 解答例あり

☆x が期待値 m, 分散 σ^2 の正規分布に従うとき，$u(x)$ の期待値，

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}dx$$

を考える．u が二回微分可能な凹関数であり，$u'(x) > 0$ がすべての x について成立するとき，これが σ についての減少関数であることを示したい．

1. $y = \frac{x-m}{\sigma}$ とおいて，置換積分し，以下のように変形できることを確かめなさい．

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} u(\sigma y + m)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2}dy$$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx$ の値を計算しなさい．
3. U を σ で微分した値を計算し，以下の形になることを確かめなさい．

$$\frac{\partial U}{\partial \sigma} = \int_{-\infty}^{\infty} yu'(\sigma y + m)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2}dy$$

   ただし，積分の中身を微分してから積分するものと，積分してから微分したものが同じであるとして良い（たとえばある正の実数 a, b について $u'(x) < ax + b$ であればよい）．
4. $g(y) = u'(\sigma y + m)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2}$ とおき，$h(y) = \frac{g(y)}{\int_{-\infty}^{\infty} g(y')dy'}$ とおく．また，$H(y) = \int_{-\infty}^{y} h(y')dy'$ とする．さらに $\Phi(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(y')^2}dy'$ とする．このとき，Φ が H を一次確率支配することを示しなさい．（ヒント：問題 197）
5. $\frac{\partial U}{\partial \sigma} = \int_{-\infty}^{\infty} g(y')dy' \int_{-\infty}^{\infty} yh(y)dy$ であることを確かめなさい．
6. $\frac{\partial U}{\partial \sigma} < 0$ であることを確かめなさい．（ヒント：問題 195）

問題 298 18pt

区間 $[a, b]$ 上の分布関数 F, G について，以下の不等式がすべての x について成立するとき，F は G を二次確率支配するという．

$$\int_{a}^{x} F(y)dy \leqq \int_{a}^{x} G(y)dy$$

いま，$\int_a^b yf(y)dy = \int_a^b yg(y)dy$ とする．ただし f, g はそれぞれ F, G の確率密度関数である．F が G を二次確率支配するとき，$\int_a^b y^2 f(y)dy \leqq \int_a^b y^2 g(y)dy$ であることを示したい．

1. 以下の等式を示しなさい．
$$\int_a^b y^2 g(y)dy - \int_a^b y^2 f(y)dy = \int_a^b 2y(F(y) - G(y))dy$$
2. $H(x) = \int_a^x F(y)dy - \int_a^x G(y)dy$ とする．$H'(x) = F(x) - G(x)$ であることを確かめなさい．
3. 部分積分を用いて $H(a) = H(b) = 0$ を確かめなさい．
4. 部分積分によって，以下の等式を示しなさい．
$$\int_a^b 2y(F(y) - G(y))dy = \int_a^b 2yH'(y)dy = -\int_a^b 2H(y)dy$$
5. すべての y について $H(y) \leqq 0$ であることを確かめ，それによって $\int_a^b y^2 f(y)dy \leqq \int_a^b y^2 g(y)dy$ であることを示しなさい．

問題 299 15pt

区間 $[a, b]$ 上の分布関数 F, G について，以下の不等式がすべての x について成立するとき，F は G を二次確率支配するという．
$$\int_a^x F(y)dy \leqq \int_a^x G(y)dy$$
いま，$\int_a^b yf(y)dy = \int_a^b yg(y)dy$ とする．ただし f, g はそれぞれ F, G の確率密度関数である．このとき，$x > x^*$ ならば $F(x) > G(x)$ であり，$x \leqq x^*$ ならば $F(x) \leqq G(x)$ となる x^* がただひとつあるとする．このとき，F が G を二次確率支配することを示しなさい．

問題 300 10pt

F が期待値 m, 分散 σ^2 の正規分布の分布関数であり，G が期待値 m, 分散 $(\sigma')^2$ の正規分布の分布関数であるとする．つまり以下の等式が成り立つ．
$$F(y) = \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx$$
$$G(y) = \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma'} e^{-\left(\frac{x-m}{\sigma'}\right)^2} dx$$
このとき，$\sigma' > \sigma$ であれば F が G を二次確率支配することを示しなさい．

問題 301 10pt

$[a,b]$ 上の確率分布 F に従う X について考える．

1. f の期待値を μ とする．このとき $\sigma = \left(\int_a^b (x-\mu)^2 f(x)dx\right)^{1/2}$ とする．また，$k > 0$ とする．

$$\sigma^2 = \int_{\mu-k\sigma}^{\mu+k\sigma} (x-\mu)^2 f(x)dx + \int_{\mu+k\sigma}^{b} (x-\mu)^2 f(x)dx + \int_{a}^{\mu-k\sigma} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

   であることを確認しなさい．
2. $x \geqq \mu + k\sigma$ であれば $x - \mu \geqq k\sigma$ であることを用いて次の不等式を示しなさい．

$$\int_{\mu+k\sigma}^{b} (x-\mu)^2 f(x)dx \geqq k^2\sigma^2[1 - F(\mu + k\sigma)]$$

3. $\mu - k\sigma \geqq x$ であれば $\mu - x \geqq k\sigma$ であることを用いて次の不等式を示しなさい．

$$\int_{a}^{\mu-k\sigma} (x-\mu)^2 f(x)dx \geqq k^2\sigma^2 F(\mu - k\sigma)$$

4. 2,3 の結果から次の不等式を示しなさい（これはチェビシェフの不等式と呼ばれる）．

$$\frac{1}{k^2} \geqq [1 - F(\mu + k\sigma)] + F(\mu - k\sigma)$$

問題 302 8pt

確率分布 F とその密度関数 f について，期待値を μ とする．$\sigma^2 = \int_a^b (x-\mu)^2 f(x)dx$，$\psi = \int_a^b (x-\mu)^3 f(x)dx$ とする．このとき，$1/2 < a < b < 1$ であれば以下の不等式が成立することを示しなさい．

$$(2\mu - 1)\sigma^2 + 2\psi > 0$$

問題 303 15pt 解答例あり

☆微分可能な関数 m と x について

$$\max_a u(x(a), t) - m(a)$$

を考える．ただし $u(x, 0) = 0$ かつ $m(0) = 0$ であるとする．

1. $u(x(a), t) - m(a)$ を最大化する一階の条件を求めなさい．
2. $a = t$ が最大化解であるとする．一階の条件を使って，$m(t) = u(x(t), t) - \int_0^t \frac{\partial u(x(y), y)}{\partial y} dy$ であることを示しなさい．

問題 304 15pt 解答例あり

☆$m(t) = u(x(t), t) - \int_0^t \frac{\partial u(x(y), y)}{\partial y} dy$ であるとする．また，$u(x, t) = xt$ であるとする．今，

$$\int_0^a f(t) m(t) dt \tag{17.5}$$

を最大にしたい．ただし f は $[0, a]$ 上の確率密度関数である．

1. 部分積分を用いて，(17.5) の $\int$ の中身が $x(t)$ と他のもののかけ算になるように変形しなさい．
2. いま，$x(t)$ は 0 か 1 を取るとする．(17.5) を最大にするように $x(t)$ の値を求めなさい．

問題 305 12pt 解答例あり

☆次のような関数を考える．

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x \text{ が有理数} \\ 0 & \text{if} \quad x \text{ が無理数} \end{cases}$$

1. 区間を $[0, 1]$ としたとき，すべての分割においてこの範囲での上ダルブー和が 1 であることを示しなさい（ヒント：問題 268）．
2. 区間を $[0, 1]$ としたとき，すべての分割においてこの範囲での下ダルブー和が 0 であることを示しなさい（ヒント：問題 269）．

線形代数

問題 306 10pt

A, B を 2×2 行列とする．このとき，$\det(AB) = \det(A)\det(B)$ を示したい．

1. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ と置くとき，

$$AB = \left[\boxed{}\vec{a}_1 + \boxed{}\vec{a}_2, \boxed{}\vec{a}_1 + \boxed{}\vec{a}_2 \right]$$

と書ける．ただし $\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$，$\vec{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$ である．空欄の中を埋めなさい．

2. 行列式の性質（分配法則，スカラー倍法則，一致退化法則，交代法則）を用いて $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ を示しなさい．

多変数関数の微分

問題 307 10pt

二変数の実数値関数として $u(x, y) = \min\{x, y\}$ を考える．ただしこれは以下のように定義される．

$$\min\{x, y\} = \begin{cases} x & \text{if} \quad x < y \\ y & \text{if} \quad x \geqq y \end{cases}$$

このとき u が凹関数であることを確かめたい．凹関数の定義はすべての $(x, y), (x', y')$ および $\lambda \in [0, 1]$ について以下の不等式を満たすことである．

$$f(\lambda x + (1-\lambda)x', \lambda y + (1-\lambda)y') \geqq \lambda f(x, y) + (1-\lambda) f(x', y')$$

1. $x \geqq u(x, y)$ および $x' \geqq u(x', y')$ を示しなさい．
2. $\lambda x + (1-\lambda)x' \geqq \lambda u(x, y) + (1-\lambda)u(x', y')$ を示しなさい．
3. $y \geqq u(x, y)$ および $y' \geqq u(x', y')$ を示しなさい．
4. $\lambda y + (1-\lambda)y' \geqq \lambda u(x, y) + (1-\lambda)u(x', y')$ を示しなさい．
5. 1〜4 の結果から u が凹関数であることを確かめなさい．

問題 308 10pt

二変数の実数値関数として $u(x, y) = \max\{x, y\}$ を考える．ただしこれは以下のように定義される．

$$\max\{x, y\} = \begin{cases} x & \text{if} \quad x > y \\ y & \text{if} \quad x \leqq y \end{cases}$$

このとき u が凸関数であることを示しなさい．ただし凸関数の定義はすべての $(x, y), (x', y')$ および $\lambda \in [0, 1]$ について以下の不等式を満たすことである．

$$f(\lambda x + (1-\lambda)x', \lambda y + (1-\lambda)y') \leqq \lambda f(x, y) + (1-\lambda) f(x', y')$$

問題 309 10pt

f, g は偏微分が定義できる二変数関数で実数値を取るとする．このとき，以下の不等式がすべての x, y について満たされるとする．

$$\det\left(\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix}\right) > 0$$

このとき，次の連立方程式の解が最大一つしかないことを示したい．

$$\begin{cases} f(x, y) = z \\ g(x, y) = w \end{cases} \tag{17.6}$$

ただし z, w は定数である．そのために背理法を用いて，(17.6) に解が二つあり，それが (x_1, y_1) と

(x_2, y_2) であるとする．このようなものについて，$x_1 = x_2$ かつ $y_1 = y_2$ が示されれば，解が一つしかないことが証明できたことになる．そのために以下の問いに答えなさい．

1. 次の等式が成り立つことを示しなさい．

$$f(x_1, y_2) - f(x_2, y_2) = 0$$
$$g(x_1, y_2) - g(x_2, y_2) = 0$$

2. 1 の結果とテイラー展開を用いて，

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_1 - x_2) \\ (y_1 - y_2) \end{bmatrix} = 0$$

   が成立するような x, y が存在することを示しなさい．
3. 2 の結果から $x_1 = x_2$ かつ $y_1 = y_2$ であることを示しなさい．

問題 310 10pt

☆$u(q_1, q_2) = \left[\alpha(q_1)^k + \beta(q_2)^k\right]^{1/k}$ であるとする．

1. 以下の等式が成り立つことを確認しなさい．

$$u(q_1, q_2) = q_1 \left[\alpha + \beta \left(\frac{q_2}{q_1}\right)^k\right]^{1/k}$$

2. $q_1 < q_2$ であるとする．$k \to -\infty$ とするとき，$u(q_1, q_2)$ の極限を求めなさい．
3. $q_1 > q_2$ であるとする．$k \to -\infty$ とするとき，$u(q_1, q_2)$ の極限を求めなさい．
4. $k \to -\infty$ とするとき，$u(q_1, q_2)$ が $\min\{q_1, q_2\}$ に収束することを確かめなさい．

問題 311 10pt

☆$u(q_1, q_2) = \left[\alpha(q_1)^k + (1 - \alpha)(q_2)^k\right]^{1/k}$ であるとする．

1. 以下の等式が成り立つことを確認しなさい．

$$\lim_{k \to 0} \alpha(q_1)^k + (1 - \alpha)(q_2)^k = 1$$

2. $\ln(u(q_1, q_2))$ を計算しなさい．
3. $\alpha(q_1)^k + (1 - \alpha)(q_2)^k$ を k で微分しなさい．
4. $k \to 0$ とするとき，$u(q_1, q_2)$ が $(q_1)^\alpha (q_2)^{1-\alpha}$ に収束することを確かめなさい．
   （ヒント：問題 281）

問題 312 10pt

★$u(q_1, q_2) = \left[\alpha(q_1)^k + (1-\alpha)(q_2)^k\right]^{1/k}$ であるとする．$k \to \infty$ としたときの $u(q_1, q_2)$ の極限を求めなさい．

問題 313 10pt 解答例あり

次の空欄を埋めなさい．

- 次の条件を満たす関数は一次同次関数だけである．

$$\frac{\partial f(L,K)}{\partial L}L + \frac{\partial f(L,K)}{\partial K}K = f(L,K)$$

- このことを証明する．まず $g(t) = f(tL, tK)$ とおいてみよう．$g(t) = f(tL, tK)$ を t で微分すると

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\partial f(tL,tK)}{\partial \boxed{}}\boxed{} + \frac{\partial f(tL,tK)}{\partial K}\boxed{} \\ &= \frac{1}{t}\frac{\partial f(tL,tK)}{\partial \boxed{}}\boxed{}L + \frac{\partial f(tL,tK)}{\partial K}\boxed{}K = \frac{1}{t}f(tK,tL) = \frac{1}{t}g(t) \end{aligned}$$

である．そうすると

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = \boxed{}$$

を得る．両辺を t に関して 1 から k まで積分すると

$$\ln\frac{g(k)}{\boxed{}} = \boxed{}$$

を得る．すなわち，

$$\frac{g(k)}{\boxed{}} = \boxed{}$$

である．よって $g(k) = kg(1)$ となるので g を f に直せば一次同次の定義を得る．

制約付き最適化問題

問題 314 10pt

☆$u(q_1, q_2, q_3) = \left[\alpha(q_1)^k + \beta(q_2)^k + \gamma(q_3)^k\right]^{1/k}$ であるとき，マーシャル型の需要関数を求めなさい．

問題 315 20pt

☆ある財を生産する二つの企業，A と B があったとする．企業 A は財を生産するとき，一個生産するのに c_A だけの費用が，企業 B は財を生産するとき，一個生産するのに c_B だけの費用がかかるとする．企業 A の生産量を q_A，企業 B の生産量を q_B とする．

1. 市場の生産量（つまり供給量）が $q = q_A + q_B$ だとする．また需要関数が $D(p) = d - a \cdot p$ という形であったとする．このとき，需要量と供給量を一致させる価格を求めなさい．
2. 1 で求めた価格が企業が直面する価格であるとする．このとき，各企業の利潤を q_A, q_B の関数として書きなさい．
3. 企業 A には生産量を正にする制約（つまり $q_A \geqq 0$）があるとする．企業 A について，2 で求めた利潤を最大化するような q_A をフリッツ・ジョン条件を用いて求めなさい．ただし求める解には q_B が含まれている可能性があることに注意する．
4. 企業 B にも生産量を正にする制約（つまり $q_B \geqq 0$）があるとする．企業 B について，2 で求めた利潤を最大化するような q_B をフリッツ・ジョン条件を用いて求めなさい．ただし求める解には q_A が含まれている可能性があることに注意する．
5. 3，4 で求めた条件を同時に満たす q_A, q_B を求めなさい（このような (q_A, q_B) はクールノー均衡と呼ばれる）．

問題 316 20pt

☆ある財を生産する二つの企業，A と B があったとする．企業 A は財を生産するとき，一個生産するのに c_A だけの費用が，企業 B は財を生産するとき，一個生産するのに c_B だけの費用がかかるとする．企業 A の生産量を q_A，企業 B の生産量を q_B とする．

1. 市場の生産量（つまり供給量）が $q = q_A + q_B$ だとする．また需要関数が $D(p) = d - a \cdot p$ という形であったとする．このとき，需要量と供給量を一致させる価格を求めなさい．
2. 1 で求めた価格が企業が直面する価格であるとする．このとき，各企業の利潤を q_A, q_B の関数として書きなさい．
3. 企業 A には生産量を正にする制約（つまり $q_A \geqq 0$）があるとする．企業 A について，2 で求めた利潤を最大化するような q_A をフリッツ・ジョン条件を用いて求めなさい．ただし求める解には q_B が含まれている可能性があることに注意する．

4. 企業 B には生産量を一定以上にする制約（つまり $q_B \geqq b$）があるとする．企業 B について，2 で求めた利潤を最大化するような q_B をフリッツ・ジョン条件を用いて求めなさい．ただし求める解には q_A が含まれている可能性があることに注意する．
5. 3，4 で求めた条件を同時に満たす q_A, q_B を求めなさい．

問題 317 8pt 解答例あり

☆フリッツ・ジョン条件における目的関数のラグランジュ乗数 λ_0 について，$\lambda_0 > 0$ とは必ずしもならないことを確認したい．そのために次の問題を考える．[a]

$$\max_{x,y} -x - y \text{ s.t. } y - x^2 \geqq 0, 0 \geqq y$$

1. この問題の最大化解を答えなさい．
2. 1 で答えた最大化解について，フリッツ・ジョン条件において $\lambda_0 = 0$ となることを確認しなさい．

[a] 以前の版では問題に誤りがありましたので修正しています．2024/01/17

問題 318 10pt 解答例あり

☆次の最大化問題を解きなさい．

$$\max_{x} f(x) \text{ s.t. } x^2(x-1) \geqq 0$$

ただし

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{if} \quad x \leqq 1/2 \\ -8(x-1)^2(x-1/2) & \text{if} \quad x \geqq 1/2 \end{cases}$$

動学システムと最適化

問題 319 7pt

問題 266 で考えたモデルを考える．これを $x_{t+1} = (sx_t)^a$ と決まる動学システムと考えるとき，その不動点を求めなさい．

問題 320 40pt 解答例あり

☆次のような装置を考える．

- 装置は「正常」か「故障している」かのいずれかである．
- 正常であればボタンを押せば確率 q で商品がでる．これを得ることの効用は $R > 0$ である．
- 故障していればボタンを押しても決して商品は出ない．

- ボタンを押すためには料金 $c < qR$ を支払う必要があるとする.
- ボタンを押すことができるのは毎年 1 回だけだとする.

今，装置が正常である確率を p_0 とし，割引因子を δ とする．効用は割引現在価値の総和として表される．この効用を最大化するためにいつまでボタンを押せばいいかを考えたい.

(1) ボタンを押して，商品が出たとする．このとき，この装置が正常である確率を求めなさい.
(2) (1) のとき，最適な行動はどのようになるか答えなさい.
(3) (1) のとき，割引現在価値の総和を V とする．V の値を求めなさい.
(4) t 回ボタンを押したときに一度も商品が出なかったという条件のもとでこの装置が正常である確率を p_t とする．このとき p_t を p_{t-1} と q だけをつかって書きなさい.
(5) この装置が正常である確率が p のときの価値関数を $W(p)$ とする．もし，ボタンを押すことが最適ならば価値関数 W は次のように書ける．空欄を埋めなさい.

$$W(p) = -c + \underbrace{p \cdot q \cdot}_{\text{商品が出る確率}} \boxed{} + \underbrace{[p \cdot (1-q) + (1-p)]}_{\text{出ない確率}} \cdot \delta \cdot W\left(\boxed{}\right)$$

ただし，一度商品が出たときの価値が (2) で与えられていることに注意すること.
(6) ボタンを押さないことが最適であるならば，装置に関する情報が更新されないので以降ずっとボタンを押さないことが最適になる．つまりボタンを押さないのであればそれ以降の効用は 0 となる．ボタンを押さないことが最適になる条件を $W(p)$ を使って書きなさい.
(7) p の時点でボタンを押さないことが最適ならば p が下がってもやはりボタンを押さないことが最適である．これを踏まえてボタンを押さないことが最適になるような p の最大値を求めなさい.
(8) (7) で求めた p の最大値を下回る p_t の t の中で一番小さい値を T とするとき，$W(p_t)$ の値を求めなさい.

第二刷時追加分

問題 321 3pt 解答例あり

$a > b$ を $a - b$ が正の数であるということとして定義する．また，正の数同士を足しても正の数であるとする．このとき以上に述べた二つの性質を用いて，実数上の不等式が推移性を満たすことを示しなさい．ただし推移性とはすべての a, b, c について $a > b$ かつ $b > c$ ならば $a > c$ が成立することを言う.

問題 322 3pt

$a \geqq b$ を $a - b$ が正の数または 0 であるということとして定義する．また，正の数同士を足しても正の数であるとする．このとき以上に述べた二つの性質を用いて，実数上の不等式 $\geqq$ が推移性を満たすことを示しなさい．

問題 323 10pt 解答例あり

C さんが壺 A と壺 B のうち一つを選び，その選んだ壺から球を一つ引く．壺 A と B にはそれぞれ赤い球と青い球が合わせて 100 個入っており，他には何も入っていない． C さんの考えは以下の通りである．

1. 壺 A には赤い球が X 個入っているので，壺 A から赤い球を引く確率は X% であり，青い球を引く確率は $100 - X$% である．
2. 壺 B から球を一つ引いたとき赤い球を引くことと青い球を引くことは同時に起きず，またどちらか一方は必ず起きる．
3. 壺の中からランダムに球を一つ引くとき，赤い球を引くと賞金が出るとすると，$X \leqq 65$ なら壺 B を選びたい．
4. 青い球を引くと賞金が出るとすれば $X \geqq 47$ なら壺 B を選びたい．
5. 賞金が貰える確率が高い壺を選びたい．

このとき，C さんが考えている「壺 B から引いた球の色に関する確率」はコルモゴロフの公理を満たしていないことを説明しなさい

問題 324 18pt 解答例あり

X という候補者と，Y という候補者から一人を選ぶことを考える．候補者を選ぶ基準は能力で，候補者 X の能力 x は，確率 $1/2$ で 0，確率 $1/2$ で $[0, 1]$ 上の一様分布に従っている．候補者 Y の能力 y は $[0, 1]$ 上の一様分布に従っている．能力の高い方を選ぶとするとき，次の問いに答えなさい．

1. 候補者 X が選ばれる確率を計算するため，候補者 X の能力 x の値がわかっているとしたとき，y の値が x 以下である確率を求めなさい．
2. 1 の値を x について期待値を取ることで，候補者 X が選ばれる確率を計算しなさい．
3. 2 から候補者 X が選ばれる確率は候補者 Y が選ばれる確率より低いことを示しなさい．
4. 候補者 Y が選ばれるという条件のもとでの Y の能力の期待値を $E(y \mid Y)$，候補者 X が選ばれるという条件のもとでの X の能力の期待値を $E(x \mid X)$ とする．このとき，$E(x \mid X)$ と $E(y \mid Y)$ を計算しなさい．
5. $E(y \mid Y) < E(x \mid X)$ を示しなさい．

問題 325 12pt 解答例あり

$\bar{x} = \int_a^b xf(x)dx$ とする．ただし，f は確率密度関数である．u が凹関数であれば $\int_a^b u(x)f(x)dx \leqq u(\bar{x})$ であることを示しなさい．

問題 326 12pt

$\bar{x} = \int_a^b xf(x)dx$ とする．ただし，f は確率密度関数である．u が凸関数であれば $\int_a^b u(x)f(x)dx \geqq u(\bar{x})$ であることを示しなさい．

問題 327 10pt 解答例あり

f と g が確率密度関数であるとする．ただし，$f(x) > 0$ かつ $g(x) > 0$ がすべての x について成り立つとする．また，

$$K(f,g) = \int f(x) \ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) dx$$

とする．このとき，$K(f,g) \geqq K(f,f) = 0$ であることを示しなさい．

問題 328 3pt

$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{bmatrix}$ とする．$\det(A)$ を計算しなさい．

問題 329 3pt

$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 12 & -4 \end{bmatrix}$ とするとき，AA を計算しなさい．

問題 330 3pt

$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$ とするとき，AA を計算しなさい．

問題 331 8pt

ある親が二人の子ども（A と B）にケーキを分ける問題を考える．ケーキは全部で 12 ピースだけあり，子ども A にケーキを A ピースだけ分け与えると子ども A は $u_A = A$ だけの効用を得る．一方で，子ども B にケーキを B ピースだけ与えると，子ども B は $u_B = 2B$ だけの効用を得る．親の効用 U は，子どもらが得る効用（u_A と u_B）で決まる次のような形をしている：$U(u_A, u_B) = (u_A)^{1/2}(u_B)^{1/2}$

1. この親の効用を最大にするように子どもらにケーキを分配する量 A と B を決める問題は制約付き最大化問題といえる．この問題のラグランジュ関数を答えなさい．
2. 制約付き最大化問題の解 A, B の値を答えなさい．
3. 子ども B の効用が $u_B = 10B$ となった．このとき，制約付き最大化問題の解 A, B の値は (2) の結果からどのように変わるだろうか？
4. 子ども A の効用が $u_A = A + 6$ となった．このとき，制約付き最大化問題の解 A, B の値は (2) の結果からどのように変わるだろうか？

問題 332 8pt

ある親が二人の子ども（A と B）にケーキを分ける問題を考える．ケーキは全部で 12 ピースだけあり，子ども A にケーキを A ピースだけ分け与えると子ども A は $u_A = \ln(A)$ だけの効用を得る．一方で， 子ども B にケーキを B ピースだけ与えると，子ども B は $u_B = 2\ln(B)$ だけの効用を得る．親の効用 U は，子どもらが得る効用（u_A と u_B）で決まる次のような形をしている：
$U(u_A, u_B) = u_A + u_B$
ただし，$f(x) = \ln(x)$ であるとき，$f'(x) = 1/x$ であることに注意する．

1. この親の効用を最大にするように子どもらにケーキを分配する量 A と B を決める問題は制約付き最大化問題といえる．この問題のラグランジュ関数を答えなさい．
2. 制約付き最大化問題の解 A, B の値を答えなさい．
3. 子ども B の効用が $u_B = 3\ln(B)$ となった．このとき，制約付き最大化問題の解 A, B の値は (2) の結果からどのように変わるだろうか？
4. 子ども A の効用が $u_A = \ln(A) + 6$ となった．このとき，制約付き最大化問題の解 A, B の値は (2) の結果からどのように変わるだろうか？

問題 333 8pt

D を需要関数，S を供給関数とするとき，$Z(p) = D(p) - S(p)$ となるような Z を超過需要関数と呼ぶ．

1. $p_{t+1} = f(p_t) = p_t + aZ(p_t)$ となるような動学システムを考える．ただし，$a > 0$ とする．このとき，f の不動点が市場均衡価格であることを示しなさい．
2. Z が微分でき，すべての p について，$0 > Z'(p) > m$ であるという．ただし，m は負の数である．このとき，1 で求めた不動点が局所安定であるような a の範囲を示しなさい．

追加問題

問題 334 5pt

$a > 0$ とし，f を $[0, a]$ 上の確率密度関数，F を確率分布関数とするとき，次を示しなさい．

$$\int_0^a x^p f(x)dx = \int_0^a px^{p-1}(1 - F(x))dx$$

問題 335 7pt

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ とする．また，$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ とする．
行列式の性質（分配法則，スカラー倍法則，一致退化法則，交代法則）のみを用いて $\det(A) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\det(E)$ を示しなさい．

第Ⅱ部

解答編

第 1 章

基礎の計算

解答例 1

1.

$$
\begin{aligned}
& a+\frac{a\times a}{b} = a\times \boxed{\frac{b}{b}} + \frac{a\times a}{b} && (1=\frac{b}{b}\text{ より}) \\
\Rightarrow\quad & = a\times \boxed{b} \times \boxed{\frac{1}{b}} + \boxed{a\times a} \times \boxed{\frac{1}{b}} && (\frac{1}{b}\text{ をつくる}) \\
\Rightarrow\quad & = \boxed{(a\times b+a\times a)} \times \frac{1}{b} && (\frac{1}{b}\text{ でくくる}) \\
\Rightarrow\quad & = \boxed{(b+a)}\, a\times \frac{1}{b} && (a\text{ でくくる})
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
(a+b)\times(a+b) &= (a+b)\boxed{a} + (a+b)\boxed{b} && (\text{分配法則より}) \\
&= \boxed{a\times a+b\times a} + \boxed{a\times b+b\times b} && (\text{分配法則より}) \\
&= a\times a+\boxed{a\times b} + a\times b+b\times b && (\text{交換法則より}) \\
&= \boxed{a^2} + a\times b+a\times b+\boxed{b^2} && (a\times a=a^2, b\times b=b^2) \\
&= a^2+\boxed{2ab}+b^2 && (a\times b+a\times b=2(ab))
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
(a+b)\times(a-b) &= (a+b)\boxed{a} - (a+b)\boxed{b} \\
&= \boxed{a\times a+b\times a} - \boxed{a\times b-b\times b} \\
&= a\times a+\boxed{a\times b} - a\times b-b\times b \\
&= a^2-b^2
\end{aligned}
$$

解説

- 展開したり，変形している箇所をハイライトしているので，それをヒントに自分自身で変形できるかどうかを確認してみましょう．
- 大事なことは，式変形の理由ひとつひとつを自分で説明できるかどうかです．それさえ合っていればどのような方法でも構いません．

解答例 3

例 1. $(1+5)/(2a+3) = 6/17$

例 2. $(1+5)/(2a)+3 = 6/14+3 = 3/7+3 = 24/7.$

例 3. $a((1+5)/2)+3 = 7\times 3+3 = 24$

例 4. $1+a(5/2)+3 = 4+7\times(5/2) = 4+35/2 = 43/2.$

解説

このように複数の解釈が考えられてしまうので，どこまでが分母でどこまでが分子かをカッコを使ってはっきり示すこと．数学の回答では曖昧さはなるべく無くさなければいけない．

解答例 5

$$2 \heartsuit (1 \heartsuit 2) = 2^{(1^2)} = 2$$
$$(2 \heartsuit 1) \heartsuit 2 = (2^1)^2 = 2^2 = 4$$

であるので結合法則を満たさない．

$$2 \heartsuit 1 = 2^1 = 2$$
$$1 \heartsuit 2 = 1^2 = 1$$

であるので交換法則を満たさない．

解説

- カッコで囲まれているものを先に計算するという約束を思い出すこと．
- 満たさないような例を一組でも見つけてこれば良い．まずは適当な数字をとにかく代入してみることがコツである．

解答例 8

逆元の定義より $a+(-a)=0$ である．-1 をかけると $-1\times a+(-1)\times(-a)=-1\times 0$ である．どの実数に 0 をかけても 0 になるので $-1\times a+(-1)\times(-a)=0$ である．両辺に $-a$ を足し，式を展開する．具体的には次のように展開する．

$$
\begin{array}{rrl}
 & a+(-a)=0 & (-a \text{ の定義}) \\
\Rightarrow & -1\times(a+(-a))=-1\times 0 & (\text{両辺に } -1 \text{ をかける}) \\
\Rightarrow & -1\times a+(-1)\times(-a)=-1\times 0 & (\text{分配法則で展開}) \\
\Rightarrow & -1\times a+(-1)\times(-a)=0 & (-1\times 0=0) \\
\Rightarrow & -1\times a+(-1)\times(-a)+(-a)=-a & (\text{両辺に } (-a) \text{ を足す}) \\
\Rightarrow & -1\times a+(-1)\times(-a)+1\times(-a)=-a & ((-a)=1\times(-a)) \\
\Rightarrow & -1\times a+((-1)+1)\times(-a)=-a & ((-a) \text{ でくくる}) \\
\Rightarrow & -1\times a+0\times(-a)=-a & (1+(-1)=0) \\
\Rightarrow & -1\times a=-a & (0\times(-a)=0)
\end{array}
$$

解説

変形した箇所をハイライトしている．どのように変形が行われたかを自分で書きながらチェックしてみましょう．

解答例 9

$a\times(-b)+a\times b=a\times(-b+b)=a\times 0=0$. したがって $a\times(-b)$ は $a\times b$ の逆元であるから $a\times(-b)=-ab$

解答例 10

定義と交換法則により

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=a\times\frac{1}{b}\times c\times\frac{1}{d}=ac\times\frac{1}{b}\times\frac{1}{d}$$

である．今，$\dfrac{1}{b}\times\dfrac{1}{d}$ について，bd をかけることを考える．すると交換法則と結合法則より

$$
\begin{aligned}
bd\times\frac{1}{b}\times\frac{1}{d} &= \left(b\times\frac{1}{b}\right)\times\left(d\times\frac{1}{d}\right) \\
&= 1\times 1=1 \qquad (\text{結合法則により } b\times\frac{1}{b},\ d\times\frac{1}{d} \text{ を先に計算})
\end{aligned}
$$

となるので $\frac{1}{b}\times\frac{1}{d}$ は bd の逆元である．つまり $\frac{1}{b}\times\frac{1}{d}=\frac{1}{bd}$ である．これより $ac\times\frac{1}{b}\times\frac{1}{d}=ac\frac{1}{bd}=\frac{ac}{bd}$ である．したがって $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ であることが示された．

解説

- ほぼ全ての変形が交換法則によるものであることに注意すること．交換法則により定義を適用できる形に直しているところがポイントである．
- この辺りの問いはとにかく定義からいろいろ変形してみることがコツである．試行錯誤が大事！

解答例 11

$b = a$ であるので $a - b = 0$． $(a - b)$ で割るということは 0 で割るということ．これはできないので誤り．

解説

文章が長くなるととにかく見落としが多くなる．うっかりこういうミスをやっていないか注意すること．

第 2 章

論理と集合

解答例 13

A	B	C	$A \to B$	$B \to C$	$(A \to B) \land (B \to C)$	$A \to C$	$((A \to B) \land (B \to C)) \to (A \to C)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

解説

$((A \to B) \land (B \to C)) \to (A \to C)$ は三段論法と呼ばれるものである．古典的な『「ソクラテスは人間である」「人間ならば死ぬ」ゆえに「ソクラテスは死ぬ」』と言うものがその例である．二つの含意が真であり，最初の含意の結論と 2 番目の含意の前提が一致していれば，最初の含意の前提と 2 番目の含意の結論をつなげた含意（3 番目の含意）も真であることを言っている．含意 $\to$ の推移性（第 4 章を参照）を示しているものとも言える．
証明方法としてはひたすら真理表を埋めていくと言うものが一つの手段である．わからなければめんどくさがらずに愚直に一歩づつ $\land$ や $\to$ 定義から確認するとよい．慣れれば素早く確認できるようになる．

解答例 15

p	q	$\neg p$	$(\neg p \land q)$	$(\neg(\neg p \land q))$	$(\neg(\neg p \land q)) \lor q$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	F	T	T
F	T	T	T	F	T
F	F	T	F	T	T

解答例 18

1.

$$
\begin{aligned}
p \to q &\equiv \neg p \vee q \\
&\equiv q \vee \neg p && (\text{交換律}) \\
&\equiv \neg(\neg q) \vee \neg p && (\text{対合律}) \\
&\equiv \neg q \to \neg p && (\neg q \to \neg p \text{ の定義より})
\end{aligned}
$$

2. $p \to q$ の逆は $q \to p$ であり，裏は $\neg p \to \neg q$ である．1 の p と q を入れ替えれば同じことが言える．

解答例 21

1. $A_1 = \{2\}$
2. $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \colon x \geqq 0\}$.

解説

1. 自然数の範囲なので -2 は属さない．
2. $x \geqq 0$ となる実数の集合なので：の右側にその条件を書く．

解答例 23

1. $A \cap B = \{a, c\}$, $A \cup B = \{a, b, c, r, s, t\}$
2. $A \setminus B = \{b, r, s\}$, $B \setminus A = \{t\}$

解説

1. $A \cap B$ は A と B の両方に属する要素をリストアップする．$A \cup B$ は二つの集合の要素をひとつにまとめる．ただし被っているものは二重にリストアップしない．
2. $A \setminus B$ は A に属しているものから B に属しているものを除く．$B \setminus A$ はその逆をする．

解答例 24

1. $x \in A \cap B$ とすると，$x \in A$ かつ $x \in B$ は真である．よって $x \in B$ である．したがって $A \cap B \subset B$ である．
2. $x \in B$ のとき，$x \in A$ または $x \in B$ は真である．よって $x \in A \cup B$ である．したがって $B \subset A \cup B$

解説

一般に $E \subset F$ を示すには $x \in E \to x \in F$ がすべての x について言えることを示す．つまり E のメンバーである条件が満たされるのであれば F のメンバーである条件が自動的に満たされることを論証すれば良い．

1. $A \cap B = \{x\colon (x \in A) \land (x \in B)\}$ であることに注意する．$x \in A$ かつ $x \in B$ は真であるということは $x \in A$ と $x \in B$ の両方が真であるということ．つまり $A \cap B$ のメンバーであるためには A と B の両方のメンバーでなくてはいけない．したがって $A \cap B$ のメンバーは B のメンバーである．
2. $A \cup B = \{x\colon (x \in A) \lor (x \in B)\}$ であることに注意する．つまり $x \in A$ あるいは $x \in B$ のうち，どちらかひとつでも真であればよい．つまり $A \cup B$ のメンバーであるためには A か B のどちらかのメンバー（どっちもでも可）であればよい．B のメンバーであれば $A \cup B$ のメンバー資格が得られるので $A \cup B$ のメンバーになれる．

解答例 25

1. $x \in A$ であれば $x \in A$ なので $A \subset A$.
2. $x \in \emptyset$ はすべての x について偽である．したがって $x \in \emptyset \to x \in A$ はすべての x について真である．ゆえに $\emptyset \subset A$ となる．

解説

2 は「空ゆえに真」の典型例である．

解答例 29

1. $x < x + 1$ は $0 < 1$ であることと同じなので，これはどんな自然数 x についても真である．したがってこの全称命題は真である．（不等号に関しては第 4 章も参照すること）
2. $x^2 = 2$ となる実数は $\pm\sqrt{2}$ のみである．これは無理数なので有理数ではない．従ってこの存在命題は偽である．
3. $x = 0$ のとき $x^2 = 0$ となるのでこの全称命題は偽である．（第 4 章参照）
4. $x = -1$ はこの等式を満たすのでこの存在命題は真である．

解説

2. $x^2 = 2$ となる x が有理数でないことは以下のようにして示す．もし，x が有理数であるならば二つの自然数 n, m を使って $x = n/m$ と表現できる．ただし，n/m がこれ以上約分できないとする．このとき，$x^2 = n^2/m^2 = 4$ であるので $n^2 = 2m^2$ となる．このとき，n^2 が偶数であると言うことは $n^2 = 2 \times [ナントカ] \cdots$ と表現できると言うことである．このとき，n も 2 の倍数である．さもなくば 2 乗しても 2 の倍数にはならないからである．これは m^2 も 2 の倍数ということになり，したがって，同じように m も 2 の倍数になる. n も m も 2 の倍数であるであるから $n = 2k, m = 2\ell$ と書けるが，これは n/m がこれ以上約分できないという前提に反している．よって $x^2 = 2$ となる x は有理数ではない.
4. 存在命題が真であることを示すにはそのような例を一つでも見つけてこれば良い.

第 3 章

方程式

解答例 31

1. 方程式を整理すると $2x - 2x = 2$，つまり $0 = 2$ となるので，解は存在しない．
2. $x = 0$ は解である．$x \neq 0$ が解であるとすると，両辺を x で割ることで，$2 = 3$ となる．これは矛盾であるので $x = 0$ 以外に解は存在しない．
3. 方程式を整理すると $0 = 1$ となるので解は存在しない．

解答例 32

1. $x = 0, y = 2$ が解である．
2. 連立方程式を整理すると $2 = 3$ になるので解は存在しない．

解説

1. 式 $x + 3y = 3y$ を整理すれば $x + 3y = 3y$ から $x = 0$ がわかる．これを 2 番目の式 $3x + 2y = 4$ に代入すれば y を求めることができる．この手の計算は試行錯誤が大事なので色々式変形してみて試すことが大事である．

解答例 33

1. $3x = 6$ から $x = 2$，これを $x + y = 3y$ に代入して $2y = 2$，つまり $y = 1$．したがって，$(x, y) = (2, 1)$ が解である．
2. $x = 4, y = -12$ が解である．

解答例 35

需給が一致する価格 p は $250 - 3p = 100 + 2p$ をみたす．このとき，$p = 30$．従って均衡価格は 30．そのときの取引量，均衡取引量は 160 である．

解答例 37

市場均衡では以下の等式が成立する．

$$\begin{cases} \text{財 1 の需要量} = \text{財 1 の供給量} \\ \text{財 2 の需要量} = \text{財 2 の供給量} \end{cases}$$

したがって，

$$\begin{aligned} 40 - 2p_1 + p_2 &= 20 + 4p_1 - p_2 \\ 50 - 3p_2 + p_1 &= 10 + 2p_2 - p_1 \end{aligned}$$

が成立する．この連立方程式を解けば

$$p_1 = \frac{90}{13}, p_2 = \frac{140}{13}$$

である．

解説

計算ソフトを使って連立方程式を解いてもよい．例えば Wolfram|Alpha(次のリンクから無料で使える `https://www.wolframalpha.com/`) という計算ソフトウェアを使うことを考える．ここでは $p_1 = x, p_2 = y$ として考えて，以下のように入力してみる．

```
Solve{40-2x+y==20+4x-y,50-3y+x==10+2y-x}
```

第 4 章

不等式

解答例 39

$a > 0 = a + (-a)$ であるので両辺に $-a$ を足せば $a + (-a) > a + (-a) + (-a)$ となる．$a + (-a) = 0$ であることを用いれば

$$\begin{aligned} & \boxed{a + (-a)} > \boxed{a + (-a)} + (-a) \\ \Rightarrow \quad & 0 > (-a) \end{aligned}$$

したがって $0 > -a$ である．

解説

- $a > 0$ からどう変形するかを考える．この場合，$0 > -a$ を導きたいので，左辺をどうやって 0 にしたいかを考えれば良い．
- 左辺を 0 にするには両辺に $-a$ を足す方法がまず考えられる．$-a$ の符号がまだわかっていないので片方の辺にだけ足す方法は使えないことに注意．

解答例 41

$a > 0$ より $ab > 0$ となる．したがって両辺に $-ab$ を足せば $0 > -ab$

解答例 45

$$c - ab = c - a + a - ab = (c - a) + a \times (1 - b)$$

である．$c - a > 0, a > 0, 1 - b > 0$ より正の数同士のかけ算，足し算は正の数であるので $(c - a) + a \times (1 - b) > 0$，つまり $c > ab$ である．

解答例 50

$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$ である．

1. $x+y \geqq 0$ のとき，$x \geqq y$ より $2x \geqq x+y$ となるので，$2x \geqq 0$，つまり $x \geqq 0$ である．$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2) = (x-y)(x(x+y)+y^2)$ であることに注意する．$x(x+y) \geqq 0$ であるから $(x-y) \geqq 0$ と合わせて $(x-y)(x(x+y)+y^2) \geqq 0$ である．
2. $x+y < 0$ のとき，$x \geqq y$ より $x+y \geqq 2y$ となるので，$0 > 2y$，つまり $0 > y$ である．$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2) = (x-y)(x^2+y(x+y))$ であることに注意する．$y < 0$ と $x+y < 0$ から $y(x+y) > 0$ である．よって $(x-y) \geqq 0$ と合わせて $(x-y)(x^2+y(x+y)) \geqq 0$ である．

解答例 51

$x < 0$ より，$x < y$ の両辺に x をかければ $x^2 > xy$ である．また，$y < 0$ より $x < y$ の両辺に x をかければ $xy > y^2$ である．推移性から $x^2 > y^2$ である．

解答例 53

すべての実数 a, b について $a \spadesuit b$ を $|a-b| \leqq 1$ と定義する．$a = 1, b = 0, c = -1$ とするとき，$a \spadesuit b$ かつ $b \spadesuit c$ であるが，$a \spadesuit c$ ではない．したがって $\spadesuit$ という関係は推移性を満たさない．

解説

$a \spadesuit b$ かつ $b \spadesuit c$ であるが，$a \spadesuit c$ ではないような a, b, c という反例をひとつもってくればよい．なお，$\spadesuit$ という記号はテキトーにもってきたものであり，他と被らなければなんでもよい．

第 5 章

関数

解答例 54

1. $f(2) = 2^2 + 3 \times 2 = 10$
2. $f(x+2) = (x+2)^2 + 3(x+2)$
3. $f(x^2) = x^4 + 3x^2$

解答例 55

1. $f(4) = 64 + 8 + 1 = 73$
2. $f(x+1) = (x+1)^3 + 2(x+1) + 1$
3. $f(x^2) = x^6 + 2x^2 + 1.$

解答例 57

1. $f \circ g(x) = (g(x)+1)^2 = ((2x+1)+1)^2 = (2x+2)^2$, $g \circ f(x) = 2f(x) + 1 = 2(x+1)^2 + 2$
2. $g^{-1}(y) = y/2 - 1/2.$

解答例 58

$g(y) = y.$

解説

このような関数を恒等関数という．実際，$g \circ f(x) = g(f(x)) = f(x)$ である．

解答例 59

仮に二つの異なる数 x, x' について, $f(x) = f(x') = y$ であるとする．このとき，逆関数 f^{-1} が存在したとすれば y に対して x か x' のいずれかを返さなければならない．$f^{-1}(y) = x$ とする．すると

$$f^{-1}(f(x')) = f^{-1}(y) = x$$

となり，逆関数の条件を満たさない．一方で $f^{-1}(y) = x'$ とするとき

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x'$$

となりやはり逆関数の条件を満たさない．したがって逆関数の条件を満たす関数は存在しない．

解説

逆関数の定義は定義域内のすべての x について以下の等式が成立することである．

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

解答例 60

1. $f(x) = -x + 5$
2. $f(x) = -x/3 + 16/3.$
3. $x = 2$
4. $f(x) = -2x/5 + 7/5.$
5. $f(x) = x/4 - 7/2.$

解答例 61

1. パンの需要関数は一次関数と問題文にあるのでこれを $D(p) = b - ap$ とかく．

$$\begin{aligned} 40 &= D(120) = b - 120a \\ 70 &= D(100) = b - 100a \end{aligned}$$

   となるので，この連立方程式を解けば $a = 3/2$，$b = 220$ である．したがって需要関数は $D(p) = 220 - \frac{3}{2}p$ となる．
2. 1 より需要関数は $D(p) = 220 - \frac{3}{2}p$ となる．$D(p) = q$ とおくと

$$\begin{aligned} & q = 200 - \frac{3}{2}p \\ \Rightarrow \qquad & p = \frac{400}{3} - \frac{2}{3}q \end{aligned}$$

   であるので逆需要関数は $P(q) = \frac{400}{3} - \frac{2}{3}q$ である．
3. 1 より需要曲線の傾きは 3/2 であるので新しい需要曲線の傾きは $(3/2) \cdot (1/2) = 3/4$ である．このとき，新しい需要関数 $D^{new}(p) = 220 - \frac{3}{4}p$ となるので，

$$D^{new}(120) = 220 - \frac{3}{4}120 = 220 - 90 = 130$$

   となる．よって 130 個.

4. 需要の価格弾力性は

$$
\begin{aligned}
-\frac{\frac{D(100)-D(120)}{D(120)}}{\frac{100-120}{120}} &= -\frac{\frac{70-40}{70}}{\frac{100-120}{120}} \\
&= -\frac{\frac{70-40}{70}}{\frac{-20}{120}} \\
&= -\frac{\frac{30}{70}}{\frac{-20}{120}} \\
&= \frac{\frac{30}{70}}{\frac{20}{120}} \\
&= \frac{\frac{3}{7}}{\frac{1}{6}} \\
&= \frac{\frac{3}{7}\cdot 6}{\frac{1}{6}\cdot 6} \\
&= \frac{\frac{18}{7}}{1} \\
&= \frac{18}{7}
\end{aligned}
$$

である.

第 6 章

二次関数

解答例 64

1. $D(p) = 130 - p$.
2. $D^{-1}(q) = 130 - q$
3. コンビニの利潤は

$$pD(p) - 20D(p) = (p - 20)(130 - p)$$

これを最大化する価格は $p = 75$

解答例 65

逆需要関数は $D^{-1}(q) = 100 - q$. 従って企業の利潤は $\underbrace{(100 - q)}_{\text{価格}} q - q^2$. この利潤を最大にする生産量は $q = 25$. このときの価格は $p = 100 - 25 = 75$.

解答例 66

1. $D^{-1}(q) = 100/3 - q/3$.
2. 利潤は

$$\left(\frac{100 - q}{3}\right) q - 2q$$

これを最大化する生産量は $q = 47$. このときの価格は $53/3$

3. 利潤は

$$(100 - 3p)p - 2(100 - 3p)$$

これを最大化する価格は $p = 53/3$. このときの需要量は 47.

解答例 67

1. 逆需要関数が $P(q) = 120 - q$ であるので，企業の利潤は

$$P(q)q - 3q = (117 - q)q = -q^2 + 117q = -(q - 117/2)^2 + (117)^2/4$$

従って利潤を最大にする生産量は 117/2

2. このときの価格は $P(117/2) = (240 - 117)/2 = 123/2$.

解答例 68

1. A 地域の需要関数を D_A とすると $D_A(p) = 45 - p/4$
2. B 地域の需要関数を D_B とすると $D_B(p) = 130 - p$.
3. 地域 A と地域 B で販売する価格を p とすると企業の利潤は

$$\begin{aligned}&\underbrace{(45 - p/4)(p - 10)}_{\text{A 地域の利潤}} + \underbrace{(130 - p)(p - 10)}_{\text{B 地域の利潤}}\\ &= (175 - \frac{5}{4}p)(p - 10)\end{aligned}$$

これを最大にする価格は $p = 75$. 従って 75 万円

第 7 章

指数・対数

解答例 71

対数の性質より $a^{\log_a b} = b$ および $a^{\log_a b^n} = b^n$．一方で $a^{\log_a b} = b$ の両辺を n 乗すると $a^{n\log_a b} = b^n$ 従って $a^{\log_a b^n} = a^{n\log_a b}$．指数部分を比較すると $\log_a b^n = n\log_a b$.

解答例 72

1. の方法では $(1.02)^{10} = 1.21899...$ であり，2. の方法では $(1.01)^3 \times (1.03)^5 \times (1.01)^2 = 1.2184...$ となる．したがって，1 の方法の方が金額が高い．

解説

- Google 検索や Wolfram|Alpha などで以下のように入力すれば計算結果が得られます（タイプの仕方がわからなければコピペして検索してみましょう）．

  - $(1.02)^{10}$ = `(1.02)^10`
  - $(1.01)^3 \times (1.03)^5 \times (1.01)^2$ = `(1.01)^3*(1.03)^5*(1.01)^2`

  電卓を使ってもいいですが，途中式が残らない場合があるのでできれば Google 検索や Wolfram|Alpha などを使う方法をお勧めします．
- この結果は第 11 章で学ぶ凸関数の話と関係があります．凸関数を学んだ後に考えてみましょう．

解答例 74

1. t 年経つとき預金額は $X(1.01)^t$ となる．
2. $X(1.01)^t \geqq 2X$

3. $X(1.01)^t \geqq 2X$ の両辺に $\log_2$ を作用させると

$$
\begin{aligned}
& & (1.01)^t &\geqq 2 \\
&\Rightarrow & \log_2(1.01)^t &\geqq 1 \\
&\Rightarrow & t\log_2(1.01) &\geqq 1 \\
&\Rightarrow & t &\geqq \frac{1}{\log_2(1.01)}
\end{aligned}
$$

となる．$\log_2(1.01) = 0.014$ と計算していいので，$t \geqq 71.42....$ 従って 72 年.

解答例 75

$(1.03)^t \geqq 2$ が成立すれば良いので両辺の対数をとると

$$
\begin{aligned}
t\log_2(1.03) &\geqq 1 \\
t &\geqq \frac{1}{\log_2(1.03)} \approx 23.8
\end{aligned}
$$

となる．従って 24 年である．

解答例 77

それぞれの割引現在価値が等しいので $\delta^{10}3000 = \delta^5 2000$ である．従って

$$
\begin{aligned}
& & \delta^5 &= \frac{2}{3} & & \\
&\Rightarrow & \delta &= \left(\frac{2}{3}\right)^{1/5} & & (\text{両辺を } 1/5 \text{ 乗している})
\end{aligned}
$$

解答例 79

$\log_a(x^p)$ は $(a)^{\log_a(x^p)} = x^p$ を満たす数である．また $x = a^{\log_a x}$ が成り立つ．これより

$$
\begin{aligned}
& & (a)^{\log_a(x^p)} &= x^p & & \\
&\Rightarrow & (a)^{\log_a(x^p)} &= \left((a)^{\log_a x}\right)^p & & (x = a^{\log_a x} \text{ を代入}) \\
&\Rightarrow & (a)^{\log_a(x^p)} &= (a)^{p\log_a x} & & (\text{指数法則 } (a^m)^n = a^{mn}) \\
&\Rightarrow & \log_a(x^p) &= p\log_a x & & (\text{指数の部分を比較})
\end{aligned}
$$

解答例 80

$a^{\log_a b} = b = c^{\log_c b}$ であることから両辺に $\log_c$ を作用させれば

$$
\begin{aligned}
& & \log_c a^{\log_a b} &= \log_c c^{\log_c b} \\
&\Rightarrow & \log_a b \log_c a &= \log_c b \\
&\Rightarrow & \log_a b &= \frac{\log_c b}{\log_c a}
\end{aligned}
$$

解説

これは底の変換公式と呼ばれるものである．

第 8 章

数列と極限

解答例 83

$a_n = 2(3/2)^{n-1}$.

解答例 84

$a_n = (-2)^{n-1}$

解答例 86

t 年目の時点で考える．1 年目（つまり $t-1$ 年前）に預けた c 万円は利子が $t-1$ 年分ついているので $(1+r)^{t-1}c$ となる．2 年目（つまり $t-2$ 年前）に預けた c 万円は利子が $t-2$ 年分ついているので $(1+r)^{t-2}c$ となる．同様に k 年目（つまり $t-k$ 年前）に預けた c 万円は利子が $t-k$ 年分ついているので $(1+r)^{t-k}c$ となる．それら全てを合計すれば

$$\sum_{k=1}^{t}(1+r)^{t-k}c = \frac{(1+r)^t-1}{(1+r)-1}c$$

となる．

解説

等比数列の和の公式の証明と同じようにする．つまり，

$$S = \sum_{k=1}^{t}(1+r)^{t-k}c = c+(1+r)c+(1+r)^2c+\cdots+(1+r)^{t-1}c$$

であるので，$(1+r)S$ を計算し引いて答えを得る．

解答例 88

すべての自然数 t について，a_t/a_{t+1} の値が同じ．

解答例 90

1. 分母分子を t で割ると $\frac{t}{t-1} = \frac{1}{1-1/t}$ であるので $\lim_{t\to\infty} \dfrac{t}{t-1} = 1.$
2. $\frac{t}{1/t} = t^2$ であるので $\lim_{t\to\infty} \dfrac{t}{1/t} = \infty$
3. $t - \sqrt{t-1} = t(1 - \sqrt{\frac{t-1}{t^2}}) = t(1 - \sqrt{\frac{1-1/t}{t}})$ であり，$\frac{1-1/t}{t} < 1/t$ であるので、$t > 2$ ならば $1 - \sqrt{\frac{1-1/t}{t}} > 1/2$ である．したがって $\lim_{t\to\infty}(t - \sqrt{t-1}) = \infty$

解答例 91

$x = 1+h$ とすれば $h > 0$ である. 二項定理により $x^n = (1+h)^n = \sum_{i=0}^{n} {}_nC_i 1^i h^{n-i} > 1+nh$. したがって, $n \to \infty$ であれば $nh \to \infty$ となり，$x^n > nh$ であるので $x^n \to \infty$ となる.

解答例 93

1.

$$S_t = 1 + 1(1+r) + \cdots + 1(1+r)^{t-1} = \frac{(1+r)^t - 1}{r}$$

2. $\lim_{t\to\infty} S_t = \infty.$

解答例 94

1. $S_{10} = 1 + 1(1+r) + \cdots + 1(1+r)^9 = \frac{(1+r)^{10}-1}{r}$
2. 割引現在価値は $S_{10}\frac{1}{(1+r)^9} = \frac{(1+r)^{10}-1}{r(1+r)^9}.$

解答例 95

1. $0.9X.$
2. $a_k = (0.9)^k X$
3. $S_t = \frac{0.9-0.9^{t+1}}{1-0.9}X = 9(1-(0.9)^t)X$
4. $\lim_{t\to\infty} S_t = 9X.$

解答例 96

1. 2δ
2. $a_k = 2\delta^k$
3. $S_t = \frac{2\delta(1-\delta^t)}{1-\delta}$
4. $\lim_{t\to\infty} S_t = \dfrac{2\delta}{1-\delta}.$

解答例 97

1. $X/(1.02)$
2. $a_k = \left(\frac{1}{1.02}\right)^k X$
3.

$$X \sum_{k=1}^{t} \left(\frac{1}{1.02}\right)^k = X \frac{1-\left(\frac{1}{1.02}\right)^{t+1}}{1-\frac{1}{1.02}}$$

解答例 99

1. $b_n = a_n - \frac{\beta}{1-\alpha}$.
2. $b_n = \alpha^{n-1} b_1$ より，

$$b_n = \alpha^{n-1}\left(a_1 - \frac{\beta}{1-\alpha}\right)$$

3.

$$\begin{aligned} a_n &= b_n + \frac{\beta}{1-\alpha} \\ &= \alpha^{n-1}\left(a_1 - \frac{\beta}{1-\alpha}\right) + \frac{\beta}{1-\alpha} \end{aligned}$$

解説

1. 変形は次のとおりである．

$$\begin{aligned} a_n &= \alpha a_{n-1} + \beta \\ a_n - \frac{\beta}{1-\alpha} &= \alpha a_{n-1} + \beta - \frac{\beta}{1-\alpha} \\ a_n - \frac{\beta}{1-\alpha} &= \alpha a_{n-1} + \beta\frac{1-\alpha}{1-\alpha} - \frac{\beta}{1-\alpha} \\ a_n - \frac{\beta}{1-\alpha} &= \alpha a_{n-1} + \frac{(1-\alpha)\beta - \beta}{1-\alpha} \\ a_n - \frac{\beta}{1-\alpha} &= \alpha a_{n-1} + \frac{-\alpha\beta}{1-\alpha} \\ a_n - \frac{\beta}{1-\alpha} &= \alpha\left(a_{n-1} - \frac{\beta}{1-\alpha}\right) \end{aligned}$$

両辺から引いた数 $\frac{\beta}{1-\alpha}$ は a_n から定数 k を引いた数列が $a_n - k = \alpha(a_{n-1} - k)$ となるように k を計算した結果である．実際，その式が満たされていれば $a_n = \alpha a_n - \alpha k + k$ となるので $-\alpha k + k = \beta$ となるように k を計算すると得られる．

解答例 100

1. $a_{t+1} - k = 1.01(a_t - k)$ より $a_{t+1} = 1.01a_t - 1.01k + k = 1.01a_t - 0.01k$ である．したがって，$a_{t+1} = 1.01\left(a_t - \frac{0.01}{1.01}k\right)$ となる．$\frac{0.01}{1.01}k = 1$ であるので $k = 101$ となる．
2. $a_{t+1} - k = 1.01(a_t - k)$ より，$a_t - k = (1.01)^t(a_0 - k)$ である．したがって
$$\begin{aligned} a_t &= k + (1.01)^t a_0 - (1.01)^t k \\ &= (1.01)^t 10 + (1 - (1.01)^t) \times 101 \\ &= 101 - 91 \times (1.01)^t \end{aligned}$$
3. $t \geqq 11$ のとき，$a_t < 0$ であり，$a_{10} > 0$ である．したがって 11 ヶ月かかる．
4. $a_{10} > 0 > a_{11}$ である．$a_{10} = 0.479...$ であるので 11 ヶ月目には約 0.48 万円支払う．10 ヶ月目までに 10 万円支払っているので合計支払額は約 10.48 万円である．

解説

- 世の中のリボ払いや分割払いもだいたいこういう仕組みである．リボ払いなどをするときは規約をよく読んで自分がいくら払うことになるのかを確認してみると良いでしょう．
- 3 は当てずっぽうでも良いですし，計算アプリにグラフを書かせても良いですし，対数を使っても良いです．対数を使う場合は $a_t < 0$ を変形していく，つまり
$$\begin{aligned} 101 - 91 \times (1.01)^t &< 0 \\ \log_{10}(101/91) &< t \log_{10}(1.01) \\ \frac{\log_{10}(101/91)}{\log_{10}(1.01)} &< t \\ \log_{10}(101/91 - 1.01) &< t \end{aligned}$$
としても計算できます（底はなんでも良いです）．

解答例 102

$[0,1] = \{x \in [0,1] : x \leqq f(x)\} \cup \{x \in [0,1] : x \geqq f(x)\}$ である．$\{x \in [0,1] : x \geqq f(x)\}$ が空集合でないとする．$x_1 \in \{x \in [0,1] : x \geqq f(x)\}$ を適当に取り，

$$x_{i+1} = f(x_i)$$

となるように数列を作る．そうすると f の性質から $x_i \geqq x_{i+1}$ となるので (x_i) は単調非増加な数列である．この数列の極限を α とすると $\alpha \geqq 0$ であることがわかる．極限では $\alpha = f(\alpha)$ となるので題意が成り立つ．$\{x \in [0,1] : x \leqq f(x)\}$ が空集合でないケースも同様．

解説

これはタルスキの不動点定理と呼ばれる結果の特殊ケースである．

解答例 103

$a_m = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{m}$ としたとき，すべての m について $a_m = \infty$ であるので $\lim_{m\to\infty} a_m = \infty$ である．また $b_n = \lim_{m\to\infty} \dfrac{n}{m}$ としたとき，すべての n について $b_n = 0$ であるので $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ である．したがって $\lim_{m\to\infty} a_m \neq \lim_{n\to\infty} b_n$ である．

解説

一般に，$\lim_{m\to\infty} a_m$ は $\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} n/m$，$\lim_{n\to\infty} b_n$ は $\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} n/m$ と表記される．第２章であった $\forall, \exists$ の順番入れ替えと同様に極限を取る順番を変えると結果が異なることがある．（もちろん同じこともある）

第 9 章

確率

解答例 104

1. $\{$表$\}, \{$裏$\}, \{$表, 裏$\}$
2. $\{$(1 回目が表， 2 回目が表)$\}$, $\{$(1 回目が表， 2 回目が裏)$\}$, $\{$(1 回目が表， 2 回目が表), (1 回目が裏， 2 回目が裏)$\}$

解答例 106

1. $x \in B \setminus A$ であれば $x \in B \wedge x \notin A$ である．したがって $(x \in B \setminus A) \wedge (x \in A)$ という命題は偽であるからどんな x についても $x \notin (B \setminus A) \cap A$ である．これは空集合の条件である．
2. コルモゴロフの公理より $(B \setminus A) \cap A = \emptyset$ から

$$P(B) = P((B \setminus A) \cup A) = P(B \setminus A) + P(A) > P(A)$$

となる．

解答例 108

$$100 \times \frac{2}{3} + 1000 \times \frac{1}{3} = \frac{1200}{3} = 400$$

解説

$1, 2, 3, 4$ のいずれかの目が出るという事象は，それぞれの目が出るという事象の和事象である．それぞれの目が出るという事象は排反であることから（つまり，たとえば 1 の目が出れば 2 の目は出ない）それぞれの確率を足し合わせれば $1, 2, 3, 4$ のいずれかの目が出るという事象の確率を求めることができる．したがって $1, 2, 3, 4$ のいずれかの目が出る確率は $4 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ である．また同様に $5, 6$ のいずれかの目が出る確率は $2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ である．

解答例 109

$$0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{2}{4} + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

解答例 110

本数/5 億 を各金額にかけて足し合わせる．期待値は 143 円である．

解答例 111

1. 最初に裏が出れば 1 回目で終わる．その確率は $\frac{1}{2}$ である．そのときの賞金額は 0 円である．
2. 10 回目で終わるためには 9 回目まで表が出て，10 回目に裏が出る．その確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

   である．そのときの賞金は 2^9 である．
3. n 回目で終わるためには $n-1$ 回目まで表が出て，n 回目に裏が出る．その確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \frac{1}{2^n}$$

   である．そのときの賞金は 2^{n-1} である．
4. 賞金の期待値は以下のように計算できる．

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} 2^{n-1} &= \lim_{T \to \infty} \sum_{n=1}^{T} \frac{1}{2^n} 2^{n-1} \\ &= \lim_{T \to \infty} \sum_{n=1}^{T} \frac{1}{2} \\ &= \lim_{T \to \infty} T \frac{1}{2} = \infty\end{aligned}$$

   したがって，期待値は ∞ である．
5. 賞金は $2^{n-1} \leqq 2^{40}$ とならなければいけない．41 回目以降に表が出た場合は 2^{40} である．賞金の期待値は $\sum_{n=1}^{40} \frac{1}{2^n} 2^{n-1} + \frac{1}{2^{40}} 2^{40} = 21$ 円である．

解説

- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{T\to\infty} \sum_{k=1}^{T} a_k$ であることに注意する．
- このようなくじの期待値が無限大になるという結果はサンクトペテルブルクのパラドックスという．
- くじの期待値が無限大になるのは胴元が無限に賞金を用意できることが前提である．たとえ用意できる賞金の限界が 2^{300} 円でもこのくじの期待値は 150 円ほどである．なお，2^{300} は 91 桁の数で無量大数を超える．(Shapley (1977) “The St. Petersburg paradox: A con games”, *Journal of Economic Theory* も参照のこと．)

解答例 112

不祥事を起こす確率は

$$0.9 \times 0.1 + 0.1 \times 0.9$$

従って，不祥事を起こしたもとでこの企業が悪い企業である確率は

$$\frac{0.1 \times 0.9}{0.9 \times 0.1 + 0.1 \times 0.9} = 0.5$$

解答例 117

1.

$$0.3 \times 0.6 + 0.7 \times 0.5 = 0.53$$

2.

$$\frac{0.18}{0.53}$$

3. 二回連続で表が出る確率は

$$0.3 \times 0.6^2 + 0.7 \times 0.5^2$$

従って歪んでいる確率は

$$\frac{0.3 \times 0.6^2}{0.3 \times 0.6^2 + 0.7 \times 0.5^2}$$

4.

$$\underbrace{\frac{0.3 \times 0.6^2}{0.3 \times 0.6^2 + 0.7 \times 0.5^2}}_{\text{歪んでいる}} \times 0.6 + \underbrace{\frac{0.7 \times 0.5^2}{0.3 \times 0.6^2 + 0.7 \times 0.5^2}}_{\text{歪んでいない}} \times 0.5$$
$$= \frac{0.3 \times 0.6^3 + 0.7 \times 0.5^3}{0.3 \times 0.6^2 + 0.7 \times 0.5^2}$$

5. n 回連続で表が出る確率は $0.3\times0.6^n+0.7\times0.5^n$. 従ってこのときコインが歪んでいる条件付き確率は

$$\frac{0.3\times0.6^n}{0.3\times0.6^n+0.7\times0.5^n}=\frac{0.3\times(\frac{6}{5})^n}{0.3\times(\frac{6}{5})^n+0.7}$$

この極限をとると，$6/5>1$ であるので

$$\lim_{n\to\infty}\frac{0.3\times(\frac{6}{5})^n}{0.3\times(\frac{6}{5})^n+0.7}=1$$

解答例 118

1. 年齢を明かさない確率は $\frac{1}{2}q_{29}+\frac{1}{2}q_{30}$ である．したがって，29 歳である確率は

$$\frac{\frac{1}{2}q_{29}}{\frac{1}{2}q_{29}+\frac{1}{2}q_{30}}=\frac{q_{29}}{q_{29}+q_{30}}$$

である．また，30 歳である確率は $1-\frac{q_{29}}{q_{29}+q_{30}}=\frac{q_{30}}{q_{29}+q_{30}}$ である．この確率を用いて年齢の期待値を計算すれば以下の通りである．

$$29\frac{q_{29}}{q_{29}+q_{30}}+30\frac{q_{30}}{q_{29}+q_{30}}=\frac{q_{29}29+q_{30}30}{q_{29}+q_{30}}$$

2. 年齢を明かす場合の期待値は 29 である．一方で明かさない場合の期待値が $\frac{q_{29}29+q_{30}30}{q_{29}+q_{30}}$ であることから，その差を計算すると以下のようになる．

$$\begin{aligned}\frac{q_{29}29+q_{30}30}{q_{29}+q_{30}}-29&=\frac{q_{29}29+q_{30}30-29(q_{29}+q_{30})}{q_{29}+q_{30}}\\&=\frac{q_{30}}{q_{29}+q_{30}}>0\end{aligned}$$

したがって，年齢を明かさない方が期待値が高い．従って期待値を小さくする方法は年齢を明かすことである．

3. 年齢を明かす方が期待値が小さいので，年齢を明かさない確率は $q_{29}=0$ とするのが良い．

解答例 120

1.

$$\frac{1}{2}\frac{1+2+3+4+5+6}{6}+\frac{1}{2}=\frac{21+6}{12}=\frac{27}{12}=\frac{9}{4}$$

2.

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\frac{1}{6}+\frac{1}{2}}=\frac{6}{1+6}=\frac{6}{7}$$

3.

$$\frac{1}{7}\frac{7}{2}+\frac{6}{7}=\frac{7+12}{14}=\frac{19}{14}$$

解答例 121

ア

$$0.5\times 0.6+0.5\times 0.4=0.5$$

イ

$$\frac{0.5\times 0.6}{0.5}=0.6$$

ウ

$$0.5\times 0.4+0.5\times 0.2=0.3$$

エ

$$\frac{0.5\times 0.4}{0.3}=2/3\approx 0.66$$

オ

$$\frac{0.5\times 0.6}{0.5\times 0.6+0.5\times 0.8}=3/7\approx 0.42.$$

第 10 章

連続関数

解答例 123

$g(x) = f(x) - x$ とする．すべての $x \in [0,1]$ について $0 \leqq f(x) \leqq 1$ であるので，$g(1) = f(1) - 1 \leqq 0$ かつ $g(0) = f(0) - 0 \geqq 0$ である．従って中間値の定理より $g(x^*) = 0$ となる $x^* \in [0,1]$ が存在する．g の定義から $f(x^*) - x^* = 0$, つまり $f(x^*) = x^*$ となる．

解説

- 中間値の定理を使うために g という関数を用意している．
- これはブラウワーの不動点定理 (Brouwer's fixed point theorem/Brouwer-Schauder-Tychonoff theorem) と呼ばれる結果の特殊ケースである．一般のケースについては Ok (2006) か Aliprantis and Border (2006) を参照すること．なお初心者向けではない．

解答例 126

$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x \neq 1 \\ 0 & \text{if} \quad x = 1 \end{cases}$ とおく．このとき，すべての x について $f(x) \neq x$ である

解答例 127

$f(x) = x + 2$ とする．$x = f(x)$ が成立したとすると $x = x + 2$，つまり $0 = 2$ となり矛盾する．したがってそのような x は存在しない．

解答例 128

中間値の定理より $f(x) = 0$ となる x が存在するので最大値は 0.

第 11 章

一変数関数の微分

解答例 129

一変数の実数値関数 f について，点 x における微分係数 f' は次のように定義される．

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

解答例 130

1. $f'(x) = 0$
2. $f'(x) = 2$

解答例 131

1. $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$
2. $f'(x) = -\frac{4}{5}x^{-9/5}$

解説

- x^a を微分するときの公式を使う．1 は $a = 1/2$，2 は $a = -4/5$ を公式 $f'(x) = ax^{a-1}$ に代入する．すると
  1. $f'(x) = ax^{a-1} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-\frac{2}{2}} = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}$ となる．
  2. $f'(x) = ax^{a-1} = \frac{-4}{5}x^{\frac{-4}{5}-1} = \frac{-4}{5}x^{\frac{-4}{5}-\frac{5}{5}} = \frac{-4}{5}x^{\frac{-9}{5}}$ となる．

解答例 132

1. $f'(x) = \ln 2$

2. 両辺の対数を取って微分する．

$$\begin{aligned}\ln f(x) &= x \ln 2 \\ \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} &= \ln 2 \\ \Rightarrow f'(x) &= 2^x \ln 2\end{aligned}$$

解答例 133

1. $f'(x) = \ln(x) + 1$
2. 両辺の対数を取って微分する．

$$\begin{aligned}\ln f(x) &= x \ln x \\ \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} &= \ln x + 1 \\ \Rightarrow f'(x) &= x^x (\ln x + 1)\end{aligned}$$

解答例 135

1. $f'(x) = -2\frac{1}{x^3}$
2. $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

解答例 136

微分の定義より

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{\Delta\to 0} \frac{a-a}{h} = 0.\end{aligned}$$

解答例 137

微分の定義より

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sum_{i=0}^{n}{}_nC_i x^i h^{n-i}-x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sum_{i=0}^{n-1}{}_nC_i x^i h^{n-i}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}{}_nC_i x^i h^{n-i-1} = nx^{n-1}
\end{aligned}$$

解説

- $i=n-1$ のとき以外は ${}_nC_i x^i h^{n-i-1}$ に h が残ることに注意する．このとき $h\to 0$ とすれば，そこの項は 0 である．したがって，$i=n-1$ のときの項，${}_nC_{n-1}x^{n-1}h^0=nx^{n-1}$ だけが残る．

解答例 138

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{ag(x+h)+bj(x+h)-ag(x)-bj(x)}{h} \\
&= \frac{ag(x+h)-ag(x)+bj(x+h)-bj(x)}{h} \\
&= \frac{ag(x+h)-ag(x)}{h}+\frac{bj(x+h)-bj(x)}{h} \\
&= a\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+b\frac{j(x+h)-j(x)}{k}
\end{aligned}$$

したがって $h\to 0$ とすれば $f'(x)=ag'(x)+bj'(x)$.

解答例 139

$$Q(h)=\begin{cases}\frac{f(g(x)+[g(x+h)-g(x)])-f(g(x))}{[g(x+h)-g(x)]} & g(x+h)\neq g(x)\text{ のとき}\\ f'(g(x)) & g(x+h)=g(x)\text{ のとき}\end{cases}$$

とする．$h\to 0$ のとき $[g(x+h)-g(x)]\to 0$ であるので $Q(h)\to f'(g(x))$ であることに注意する．

$g(x+h) \neq g(x)$ のとき $\frac{j(x+h)-j(x)}{h}$ を計算すると

$$
\begin{aligned}
\frac{j(x+h)-j(x)}{h} &= \frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h} \\
&= \frac{f(g(x)+[g(x+h)-g(x)])-f(g(x))}{h} \\
&= \frac{f(g(x)+[g(x+h)-g(x)])-f(g(x))}{h} \frac{[g(x+h)-g(x)]}{[g(x+h)-g(x)]} \\
&= \frac{f(g(x)+[g(x+h)-g(x)])-f(g(x))}{[g(x+h)-g(x)]} \frac{[g(x+h)-g(x)]}{h} \\
&= Q(h)\frac{[g(x+h)-g(x)]}{h}
\end{aligned}
$$

となる．$g(x+h) = g(x)$ のとき $\frac{j(x+h)-j(x)}{h}$ を計算すると

$$
\frac{j(x+h)-j(x)}{h} = \frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h} = 0 = Q(h)\frac{[g(x+h)-g(x)]}{h}
$$

となるのでいずれにしても

$$
\frac{j(x+h)-j(x)}{h} = Q(h)\frac{[g(x+h)-g(x)]}{h}
$$

である．$h \to 0$ とすれば第 1 項目は f を x で微分したものの定義である．第二項目は g を x で微分したものの定義である．極限同士は（収束すれば）かけ合わせて良いので以下のように計算できる．

$$
\lim_{k\to 0} \frac{j(x+h)-j(x)}{h} = f'(g(x))g'(x)
$$

解説

基本は $\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h} = \frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ として考える．ただし $g(x+h) = g(x)$ となってしまうところではこれができないので $Q(x)$ を定義して工夫する．

解答例 140

1. 合成関数の微分より $[f^2(x)]' = f'(f(x))f'(x)$
2. 合成関数の微分より

$$
[f^n(x)]' = f'(f^{n-1}(x))[f^{n-1}(x)]'
$$

となる．したがって，以下の通りである．

$$
[f^n(x)]' = f'(f^{n-1}(x)) \times f'(f^{n-2}(x)) \times \cdots \times f'(f(x)) \times f'(x)
$$

解答例 144

$x > y$ であるようなすべての x, y について平均値の定理より

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$$

となる c が存在し，$y \leqq c \leqq x$ を満たす．仮定より $f'(c) < 0$ であるので $f(x) - f(y) < 0$, つまり $f(x) < f(y)$ となる．

解答例 145

1. $\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \frac{e^x e^h - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h}$ である．
2. ネイピア数の定義は $e = \lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ である．ここで，以下の式変形を行う．

$$\begin{aligned} e^h &= \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{hm} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{h}{n}\right)^n \qquad (n = hm \text{ とおく}) \end{aligned}$$

3. $\lceil n \rceil$ が整数であるので，その微分公式により，$(1 + h/n)^{\lceil n \rceil}$ をテイラー展開すると，以下の等式を満たす c（ただし $0 \leqq c \leqq h/n$）が存在する．

$$(1+h/n)^{\lceil n\rceil} = 1 + \lceil n\rceil(1+c)^{\lceil n\rceil-1}\frac{h}{n} = 1 + (1+c)^{\lceil n\rceil-1}h\frac{\lceil n\rceil}{n}$$

$c \leqq h/n$ であるので，以下の不等式が成立する．

$$(1+c)^{\lceil n\rceil-1} \leqq (1+h/n)^{\lceil n\rceil-1} \leqq (1+h/n)^n$$

したがって，

$$(1+h/n)^{\lceil n\rceil} \leqq 1 + (1+h/n)^n h\frac{\lceil n\rceil}{n}$$

ここで $n \leqq \lceil n \rceil$ であるので

$$(1+h/n)^n \leqq (1+h/n)^{\lceil n\rceil} \leqq 1 + (1+h/n)^n\frac{\lceil n\rceil}{n}h$$

4. $1 \leqq \frac{\lceil n\rceil}{n} \leqq \frac{n+1}{n}$ より $\lim_{n\to\infty}\frac{\lceil n\rceil}{n} = 1$ であることに注意する．また，3 の結果と $\lim_{n\to\infty}(1+h/n)^n = e^h$ を用いると以下の変形を行うことができる．

$$
\begin{aligned}
\frac{e^h - 1}{h} &\leqq \lim_{n\to\infty} \frac{1 + (1 + h/n)^n \frac{\lceil n \rceil}{n} h - 1}{h} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(1 + h/n)^n \frac{\lceil n \rceil}{n} h}{h} \\
&= \lim_{n\to\infty} (1 + h/n)^n \frac{\lceil n \rceil}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} (1 + h/n)^n \lim_{n\to\infty} \frac{\lceil n \rceil}{n} \\
&= e^h
\end{aligned}
$$

5. $\lfloor n \rfloor$ が整数であるので，その微分公式により，$(1 + h/n)^{\lfloor n \rfloor}$ をテイラー展開すると，以下の等式を満たす c（ただし $0 \leqq c \leqq h/n$）が存在する．

$$
(1 + h/n)^{\lfloor n \rfloor} = 1 + (1 + c)^{\lfloor n \rfloor - 1} h \frac{\lfloor n \rfloor}{n}
$$

$c \geqq 0$ なので $(1 + c)^{[n]-1} \geqq 1$ であることに注意する．したがって

$$
(1 + h/n)^{\lfloor n \rfloor} = 1 + \lfloor n \rfloor (1 + c)^{\lfloor n \rfloor - 1} \frac{h}{n} \geqq 1 + h \frac{\lfloor n \rfloor}{n}
$$

よって $(1 + h/n)^n \geqq 1 + h\frac{\lfloor n \rfloor}{n}$

6. $1 \geqq \frac{\lfloor n \rfloor}{n} \geqq \frac{n-1}{n}$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor n \rfloor}{n} = 1$ であることに注意する．5 の結果より以下の不等式を示すことができる．

$$
\begin{aligned}
\frac{e^h - 1}{h} &\geqq \lim_{n\to\infty} \frac{1 + h\frac{\lfloor n \rfloor}{n} - 1}{h} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor n \rfloor}{n} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

7. $\displaystyle\lim_{h\to 0} e^h = 1$ より，はさみうちの定理から $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ となる．これより $(e^x)' = e^x$ である．

解説

- n が整数のとき，x^n の微分が nx^{n-1} であることはすでに正しいと証明された（問題 137）ので使って良い．
- 不等式をうまく使うことがコツである．
- この手の証明は，はじめからうまくいくようなものではない．筆者の場合，以下のような試行錯誤を経ている．できるところから試していくことは大事である．
  1. まず定義から考えよう．$e^h = \lim_{m\to\infty}((1+1/m)^m)^h = \lim_{m\to\infty}(1+1/m)^{mh}$ だな．h はあとで 0 に持っていく数だ．指数の部分に h があると面倒そうなので，なんとかカッコの中に入れたい... そうだ mh を別の数におこう．$\lim_{n\to\infty}(1+h/n)^n$ と変形できた．
  2. $(1+h/n)^n$ のままだと扱いにくいので展開できないかな？
  3. テイラー展開できたらうまく展開できそう．
  4. $n = hm$ が整数なら微分の公式は使えるが，それ以外の時は証明していないし n は整数とは限らない（h がどのように 0 に近づいても良いので）．
  5. とりあえず n が整数のときならうまくいくか試してみる．
  6. どうせ，はさみうちの定理を使うなら，それより大きい整数 $\lceil n\rceil$ とか小さい整数 $\lfloor n\rfloor$ とかを使えばうまくいくんじゃないか？
  7. とりあえずできるところから不等式を示して，後で整理してみる．
- $(e^x)' = e^x$ であることの証明方法は他にもいくらでもあるので，独自の証明方法をいくらか考えてみましょう．

解答例 146

関数 g は最大値，または最小値を $[a,b]$ の中でもつ．もしすべての点 x で $g(x) = g(a)$ であれば微分の定義からすべての点で $g'(x) = 0$ である．
もしそうでなければ $g'(x) \neq g(a)$ であり，最大値，あるいは最小値を取る点 c が $a < c < b$ をみたす．この点では $g'(c) = 0$ である．したがってどの場合でも $g'(c) = 0$ を満たす c が存在する．

解答例 147

$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ とおくと $g(a) = g(b)$ が言える．したがって，$g'(c) = 0$ となる点が存在する．$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ であるので $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ となる点 c が存在することが言える．

解答例 148

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n
\end{aligned}
$$

ただし $0! = 1$ とする．

解説

e^x は何回微分しても e^x である．したがって，マクローリン展開の公式における $f^{(n)}(0)$ は $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ となる．

解答例 149

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n
\end{aligned}
$$

であるので，

$$
\begin{aligned}
\frac{e^x}{x} &= 1/x + 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3!}x^2 + \cdots \\
&= 1/x + 1 + \frac{1}{3!}x + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!}x^{n-1} \\
&> 1/x + 1 + \frac{1}{3!}x
\end{aligned}
$$

よって，$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x} = \infty$.

解説

$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!}x^{n-1} > 0$ であることさえわかれば，$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{3!}x = \infty$ から言える．このような大雑把な極限計算で十分である．

解答例 150

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$
$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} x^{2n}$$

解説

$\sin(0) = 0, \cos(0) = 1$ であることに注意する．$\sin(x)$ をマクローリン展開すれば

$$\sin(x) = \sin(0) + \sin'(0)x + \sin''(0)\frac{x^2}{2} + \cdots$$

となる．$\sin'(x) = \cos(x)$，$\cos'(x) = -\sin(x)$ であることから $\sin''(x) = -\sin(x)$ となり，sin，cos，$-\sin$，$-\cos$ の順番でサイクルが起きる．$\sin(0) = 0$，$\cos(0) = 1$ なので，$0, 1, 0, -1, \ldots$ と交互に現れることになる．つまり，マクローリン展開の $\frac{a_m}{m!}x^m$ のうち，m が奇数のときの項が現れる．$m = 2n+1$ とおけばそのことを表現できる．また，そのときの係数は 1 と -1 が交互に現れる．$(-1)^n$ の部分はそれを表している．$\cos(x)$ のマクローリン展開も同様にできる．
この計算をする上で重要なのは，$(\sin(x))' = \cos(x)$，$(\cos(x))' = -\sin(x)$ であることおよび $\sin(0) = 0$，$\cos(0) = 1$ だけであり，これ以上の三角関数の知識は必要ない．

解答例 151

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix - \frac{1}{2}x^2 - i\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots\right) + i\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots\right) \\ &= \cos(x) + i\sin(x) \end{aligned}$$

解答例 152

オイラーの公式より $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$. $\sin(\pi/2) = 1, \cos(\pi/2) = 0$ より $e^{i\pi/2} = i$. したがって $i^i = (e^{i\pi/2})^i = e^{i^2\pi/2} = e^{-\pi/2}$.

解説

すべての自然数 n について，$\sin(2n\pi + \pi/2) = 1, \cos(2n\pi + \pi/2) = 0$ であることに注意すると i^i は複数の値を取る．

解答例 153

f が x で極大値を取るとはある実数 $\varepsilon > 0$ が存在して，定義域内のすべての y が $x-\varepsilon < y < x+\varepsilon$ を満たしていれば $f(x) \geqq f(y)$ であることを言う．

解答例 154

f が x で最小値を取るとはすべての定義域内の y について $f(x) \leqq f(y)$ であることを言う．

解答例 155

x^3 は $x=0$ で $f'(0)=0$ となるが，この点は最小値でも最大値でもない．

解答例 156

x^3 は $x=0$ で $f'(0)=0$ となるが，この点は極大値でも極小値でもない．

解答例 157

f が x で最大値を取ればすべての y について $f(x) \geqq f(y)$ が成立する．したがって適当に $\varepsilon > 0$ をとって $x-\varepsilon < y < x+\varepsilon$ をみたす y に限定しても $f(x) \geqq f(y)$ が成立する．したがって，最大値は極大値である．

解答例 158

定義域を実数全体としたとき，$f(x)=x$ は最大値を持たない．

解答例 159

$f(x) = -(x-2)^2(x+2)^2$ のとき，最大化解は $x=-2,2$.

解答例 160

定義域を $[0,1]$ としたとき，$f(x)=\ln(x+1)$ とする．これは凹関数であり，$x=1$ のとき，最大値をとるが $f'(1) \neq 0$ である．

解答例 161

f が凹関数であるとはすべての $\lambda \in [0,1]$ とすべての x, y について以下の不等式を満たすことである．

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

解答例 162

$f'(x) = (1/4)x^{-\frac{3}{4}}, f''(x) = (3/16)x^{-\frac{7}{4}} < 0$ となり，二階微分が負なので凹関数．

解答例 163

$f'(x) = 3x^2, f''(x) = 6x$ となり，二階微分が $x > 0$ のとき正であるので凹関数ではない．

解説

別解 $x = 0, y = 2, \lambda = 1/2$ としたとき，

$$\begin{aligned} &f(\lambda x + (1-\lambda)y) = f(1) = 1 \\ &< \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) = 1/2 \times 8 = 4 \end{aligned}$$

となり，凹関数の条件を満たさないので凹関数ではない．

解答例 164

$f'(x) = 1/(1-x)^2, f''(x) = 2/(1-x)^3$ であるので凸関数．

解答例 165

$-f$ が凹関数であることからすべての $\lambda \in [0,1]$ とすべての x, y について

$$-f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqq \lambda[-f(x)] + (1-\lambda)[-f(y)]$$

両辺に -1 をかけると

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

となり題意が満たされる．

解答例 166

(a) $g(\lambda) = f(\lambda x + (1-\lambda)y)$ に $\lambda = 0$ を代入すれば $g(0) = f(y)$.

(b) (11.1) 式の左辺は (a) より $g(\lambda) - g(0)$

(c) (b) より (11.1) 式は

$$\begin{aligned} & g(\lambda) - g(0) \geqq \lambda(f(x) - f(y)) \\ \Rightarrow\quad & \frac{g(\lambda) - g(0)}{\lambda} \geqq f(x) - f(y) \end{aligned}$$

$\lambda \to 0$ とすれば左辺は $g'(0)$ である．従って，$g(\lambda) = f(\lambda x + (1-\lambda)y)$ を λ で微分すれば合成関数の微分により，$g'(\lambda) = (x-y)f'(\lambda x + (1-\lambda)y)$ であり，$\lambda = 0$ より $g'(0) = (x-y)f'(y)$ となる．従って，$(x-y)f'(y) \geqq f(x) - f(y)$ が成り立つ．

解答例 167

1. $x - z = (1-\lambda)(x-y)$ であり，$y - z = -\lambda(x-y)$ である．
2. 1 とすべての v, w について $f'(w)(v-w) \geqq f(v) - f(w)$ が成り立つことから言える．（v に x, y を，w に z を代入している．）
3. $(1-\lambda)f'(z)(x-y) \geqq f(x) - f(z)$ より

$$\lambda f'(z)(x-y) \geqq \frac{\lambda}{1-\lambda}(f(x) - f(z))$$

である．これの両辺に $-\lambda f'(z)(x-y) \geqq f(y) - f(z)$ の両辺をそれぞれ加えれば

$$0 \geqq \frac{\lambda}{1-\lambda}(f(x) - f(z)) + f(y) - f(z)$$

が言える．両辺に $1-\lambda$ をかければ以下の通りである．

$$\begin{aligned} & 0 \geqq \lambda(f(x) - f(z)) + (1-\lambda)(f(y) - f(z)) \\ \Rightarrow \quad & f(z) \geqq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \\ \Rightarrow \quad & f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \qquad (z = \lambda x + (1-\lambda)y \text{ を代入}) \end{aligned}$$

解答例 168

f が凹関数であれば $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geqq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$ であり，また $\min\{f(x), f(y)\} = k$ とすれば以下が成立する．

$$\alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \geqq \alpha k + (1-\alpha)k = k$$

ゆえに $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geqq k = \min\{f(x), f(y)\}$ となり準凹関数の定義を満たす．

解答例 169

f が x^* で極大値を取るので，ある $\varepsilon > 0$ について，$x \in (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$ ならば $f(x^*) \geqq f(x)$ が成立する．
f が x^* で最大値をとらないとすれば別の x' について，$f(x') > f(x^*)$ である．f は狭義準凹関数であるのですべての $\alpha \in (0,1)$ について

$$f(\alpha x' + (1-\alpha)x^*) > f(x^*)$$

が成立する．α を十分小さくすると $\alpha x' + (1-\alpha)x^*$ は x^* に近くなる．つまり，$\alpha x' + (1-\alpha)x^* \in (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$ となる．これは f が x^* で極大値を取ることに矛盾する．よって f が x^* で最大値をとる．

解答例 170

もし 2 つ以上あったとする．それを x' と x'' とする．このとき, f が狭義準凹関数であることから $f(\alpha x' + (1-\alpha)x) > f(x') = f(x'')$ が成立するがこれは f が x' で最大値を取ることに矛盾する．

解答例 171

$f(x) = x^3$

解答例 172

$f'(x^*) = 0$ であれば $f'(x^*)(y - x^*) = 0$ を満たす．f は擬凹であるので $f(y) \leqq f(x^*)$ であり，これは f が x^* で最大値を取ることを意味する．

解答例 173

1. g が x で最大値を取るので $g(x) \geqq g(y)$ が成立する．このとき，テイラー展開により，すべての z, z' とある c について $f(z) = f(z') + f'(c)(z - z')$ がいえる．これに $z = g(x), z = g(y)$ を代入すれば $f(g(x)) = f(g(y)) + f'(c)(g(x) - g(y))$ である．従って $f(g(x)) - f(g(y)) = f'(c)(g(x) - g(y)) \geqq 0$ となるので $f'(c) > 0$ より $f(g(x)) \geqq f(g(y))$. 逆にすべての y について，$f(g(x)) \geqq f(g(y))$ であれば同様に $g(x) \geqq g(y)$ となる．
2. $(\ln(x))' = 1/x > 0$
3. $h(x) = \ln(g(x)) = -x + \ln(x)$ とする．h が凹関数であり，$f'(x) = -1 + 1/x$ より，$x = 1$ が最大化解である．$f(x) = \ln(x)$ とすれば，$f' > 0$ であること，$h(x) = f(g(x))$ であること，および (a) より g が $x = 1$ で最大値を取ることがわかる．ゆえに $x = 1$ が g の最大化解である．

解答例 174

$\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ となる数列を考える．二階のテイラー展開より $x - h_n < z_n < x + h_n$ となる z_n について，以下の等式が成立する．

$$f(x + h_n) = f(x) + f'(x)h_n + \frac{f''(z_n)}{2}(h_n)^2$$

x は極大値なので $f'(x) = 0$ である．また，仮定より h_n が十分小さいとき，$f(x) > f(x + h_n)$ が成立する．よって，

$$f(x + h_n) - f(x) = \frac{f''(z_n)}{2}(h_n)^2 < 0$$

これより $f''(z_n) < 0$ である．$n \to \infty$ とするとき，$h_n \to 0$ であるので，はさみうちの定理により $z_n \to x$ である．したがって，f'' が連続であることより $f''(x) \leqq 0$ である．

解説

- これは二階の必要条件と呼ばれる．
- $f''(x) = 0$ となる可能性は否定できない．例えば $f(x) = -x^4$ は $x = 0$ で厳密な極大値（最大値でもある）を取るが，$f''(x) = -12x^2$ で，$f''(0) = 0$ である．

解答例 176

二階のテイラー展開より $x - h < z < x + h$ となる z について，以下の等式が成立する．

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(z)}{2}h^2$$

仮定より $f'(x) = 0$ かつ $f''(x) < 0$ である．h が十分に小さければ z は x に近いので $f''(z) < 0$ である．よって十分に小さい正の数 h について

$$f(x+h) - f(x) = \frac{f''(z)}{2}h^2 < 0$$

これより $f(x+h) < f(x)$ である．同様に $f(x-h) < f(x)$ も言える．したがって x は f の極大化解である．

解説

- これは二階の十分条件と呼ばれる．
- $f''(x) = 0$ のときには極大化解となるとは限らないことに注意しよう．例えば $f(x) = x^3$ のときの $x = 0$ がその例である．

解答例 178

利潤は

$$P(q)q - C(q) = pq - C(q)$$

であるので，微分して 0 と置くと

$$p = C'(q)$$

つまり，価格と限界費用は一致する，が条件である．（このときは価格が限界収入になる）

解答例 179

利潤は

$$(100 - 3q)q - (q + q^2)$$

微分して 0 と置くと

$$\begin{aligned} & 100-6q-1-2q=0 \\ \Rightarrow\ & 99=8q \\ \Rightarrow\ & q=99/8 \end{aligned}$$

解答例 180

利潤は $P(q)q-C(q)=5q-3q=2q$ であるので，$q=100$ が最大化解である．

解説

いわゆる端点解である．

解答例 181

利潤は $P(q)q-C(q)=q(p-c)$ である．

1. $p>c$ のとき，$(p-c)>0$ であるので，すべての $0\leqq q\leqq 100$ について，$100(p-c)\geqq q(p-c)$ である．したがって，$q=100$ が利潤を最大にする生産量である．
2. $p<c$ のとき，$(p-c)<0$ であるので，すべての $0\leqq q\leqq 100$ について，$0\geqq q(p-c)$ である．したがって，$q=0$ が利潤を最大にする生産量である．
3. $p=c$ のとき，q の値によらず利潤は 0 であるので，利潤を最大にする生産量は $0\leqq q\leqq 100$ を満たすもの全てである．

解説

- $p-c$ の値について記述がないので，場合分けが必要である．$p-c$ の符号によって，利潤が q について増加的かどうかが変わってくるので，その点を踏まえて場合わけを行う．
- $p-c=0$ のときは q の値によらず利潤が 0 になることに注意する．このときの最大化解は複数ある（というより定義域の値全てが最大化解である）．

解答例 185

$u(C)=(1/2)u(4)+(1/2)u(0)$ となる C を考える．

$$C^{1/2}=(1/2)(4)^{1/2}+(1/2)(0)^{1/2}=1$$

であるので $C=1$ である．従って確実性等価は 1 である．

解答例 186

絶対的リスク回避度は $u''(x)/u'(x)$ で求めることができる． $u''(x) = a^2 e^{ax}$, $u'(x) = ae^{ax}$ であるので絶対的リスク回避度は a である．

解説

絶対的リスク回避度が x の値によらず一定であるので，このタイプの効用関数は絶対的リスク回避度一定の効用関数（Constant Absolute Risk-Aversion, CARA）と呼ばれる．

第 12 章

一変数関数の積分

解答例 189

$x > y$ であるようなすべての x, y について微分積分学の基本定理より

$$f(x) - f(y) = \int_y^x f'(a)da > 0$$

となる．ただし最後の不等式は $f'(a) > 0$ がすべての a について言えることからきている．

解説

基本，積分は足し算と同じなので，正のものだけを積分すれば正である．

解答例 190

1. $F_1(x) = 1,\ F_2(x) = 2$
2. $F_1(x) = x,\ F_2(x) = x + 1$
3. $F_1(x) = \frac{2}{3}x^3 + x,\ F_2(x) = \frac{2}{3}x^3 + x + 2$
4. $F_1(x) = \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2,\ F_2(x) = \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 2$
5. $F_1(x) = \frac{1}{-a}e^{-ax},\ F_2(x) = \frac{1}{-a}e^{-ax} + 1$
6. $F_1(x) = -\frac{1}{x},\ F_2(x) = -\frac{1}{x} + 1$

解答例 192

$(\ln(f(x)))' = f'(x)/f(x)$ であることから，$\frac{f'(x)}{f(x)} = x$ より

$$(\ln(f(x)))' = x$$

両辺を積分すれば

$$[\ln(f(x))]_a^y = \int_a^y xdx$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
& [\ln(f(x))]_a^y = \int_a^y x dx \\
\Rightarrow \quad & \ln(f(y) - \ln(f(a)) = (x^2 - a^2)/2 \\
\Rightarrow \quad & \ln(f(y)/f(a)) = (x^2 - a^2)/2 && (\text{対数法則より}) \\
\Rightarrow \quad & f(y)/f(a) = e^{(x^2-a^2)/2} \\
\Rightarrow \quad & f(y) = f(a)e^{(x^2-a^2)/2} && (f(a) = 1 \text{ より}) \\
\Rightarrow \quad & f(y) = e^{(x^2-a^2)/2}
\end{aligned}
$$

解答例 195

部分積分より

$$\int_a^b xg(x)dx = [xG(x)]_a^b - \int_a^b G(x)dx = b - \int_a^b G(x)dx$$

である．同様に $\int_a^b xf(x)dx = b - \int_a^b F(x)dx$ である．よって

$$\int_a^b xg(x)dx - \int_a^b xf(x)dx = \int_a^b (F(x) - G(x))dx$$

一次確率支配の定義からすべての $x \in [a,b]$ について，$F(x) - G(x) \geqq 0$ であるので，$\int_a^b (F(x) - G(x))dx \geqq 0$ である．したがって，$\int_a^b xg(x)dx \geqq \int_a^b xf(x)dx$ である．

解説

1. $(xG(x))' = G(x) + xg(x)$ であることを利用する．
2. G が F を一次確率支配することを直感的に言えば，G のほうが F より高い値が出やすい．分布関数 $F(x)$ は x 以下の値が出る確率である．その確率が F の方が G より大きいということは，F の方が小さい値が出やすいという意味になる．したがって期待値も F のときのほうが小さくなる．
3. 確率支配の概念について詳しくは次の文献を参照のこと． Shaked, Moshe., and J. George Shanthikumar. *Stochastic Orders* (Springer Series in Statics), 2007. *Springer.*[a] 経済学への，特にオークション理論に関する応用としては次の文献の付録が詳しい． Krishna, Vijay. *Auction Theory*, 2nd ed., Academic Press, 2009.（和訳版もあります）

[a] 所属している大学図書館によっては電子版 PDF を手に入れられることもある．

解答例 196

$$y = h(x) = \frac{x-m}{\sigma}$$

とおく．すると $h'(x) = \frac{1}{\sigma}$ であり，x の範囲が $-\infty < x < t$ であるとき，y の範囲は $-\infty < y < \frac{t-m}{\sigma}$ である．このとき，

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx$$

であることから

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} h'(x) dx &= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-y^2/2} dy \\
\int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \frac{1}{\sigma} dx &= \int_{-\infty}^{\frac{t-m}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-y^2/2} dy \\
\int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx &= \sigma \int_{-\infty}^{\frac{t-m}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-y^2/2} dy
\end{aligned}$$

となるので以下の等式が言える．

$$\begin{aligned}
F(t) &= \int_{-\infty}^{\frac{t-m}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy \\
G(t) &= \int_{-\infty}^{\frac{t-n}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy
\end{aligned}$$

$m > n$ であることから $t-m < t-n$ がいえるので，

$$G(t) - F(t) = \int_{\frac{t-m}{\sigma}}^{\frac{t-n}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy$$

となる．$e^{-y^2/2} > 0$ であるので $G(t) - F(t) > 0$，つまり $G(t) > F(t)$ がすべての t についていえることから F は G を一次確率支配することがわかる．

解答例 197

$F(b) = G(b) = 1$ であることに注意する．このとき，

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt = 1 - \int_x^b f(t)dt$$

である．$x \leqq x^*$ であれば $f(x) < g(x)$ であるので

$$G(x) - F(x) = \int_a^x (g(t) - f(t))dt > 0$$

である．$x > x^*$ であれば $f(x) > g(x)$ であるので

$$G(x) - F(x) = 1 - \int_x^b g(t)dt - \left(1 - \int_x^b f(t)dt\right) = \int_x^b (f(t) - g(t))dt > 0$$

である．したがって，すべての $x \in [a, b]$ について $G(x) \geqq F(x)$ が言えるので F は G を一次確率支配する．

第 13 章

線形代数

解答例 198

定義域も終域も実数の集合である関数すべての集合を Y とする．$f, g \in Y$ について，$f+g$ および実数 k について kf は定義域も終域も実数の集合である関数であるので $f+g \in Y$ かつ $kf \in Y$ である．よって Y はベクトル空間である．

解答例 199

多項式全ての集合を Y とする．このとき，$a, b \in Y$ とすれば

$$
\begin{aligned}
a &= a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_{n_a}x^{n_a} \\
b &= b_0 + b_1x^1 + b_2x^2 + \cdots + b_{n_b}x^{n_b}
\end{aligned}
$$

と書くことができる．ただし n_a, n_b は自然数である．ここで $n = n_a \geqq n_b$ とし，また $n_b < \ell \leqq n_a$ について $b_\ell = 0$ とおく．このとき，

$$
\begin{aligned}
a + b &= a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n \\
ka &= ka_0 + ka_1x^1 + ka_2x^2 + \cdots + ka_{n_a}x^{n_a}
\end{aligned}
$$

と書くことができる．従って，$a+b$ も ka も多項式である．よって $a+b \in Y, ka \in Y$ となり，Y はベクトル空間である．

解答例 200

$$
x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}
$$

であるので $x\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right] + y\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]$ ならば $x = y = 0$ である．よって $\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$，$\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$ は一次独立である．

解答例 201

$x=-2, y=1$ とすれば

$$x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2+2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

であるので $\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$，$\left[\begin{smallmatrix}2\\0\end{smallmatrix}\right]$ は一次従属である．

解答例 205

$$\vec{a}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\vec{b}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\vec{c}=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$$

とする. $\vec{a}=t\vec{c}$ となる t が存在するかどうかを考える. $t\neq 0$ ならば $\vec{a}$ の第 2 要素が 0 であるにも関わらず, $\vec{c}$ の第 2 要素は 0 ではない. $t=0$ ならば $t\vec{c}=0\neq\vec{a}$ であるので成立しない. したがってそのような t は存在しない. $\vec{a},\vec{b}$, $\vec{b},\vec{c}$ も同様である.
したがって, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は互いに平行ではない. 一方で

$$\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=0$$

であるので一次従属である.

解答例 206

$\begin{bmatrix}f\\e\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}f\\e'\end{bmatrix}$ を計算すると

$$\begin{bmatrix}0\\e-e'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f\\e\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}f\\e'\end{bmatrix}=(x-x')\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}+(y-y')\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$$

であるので，

$$\begin{aligned}0&=(x-x')a_1+(y-y')b_1\\0<e-e'&=(x-x')a_2+(y-y')b_2\end{aligned}$$

が成立する．$(y-y')b_1=-(x-x')a_1$ と変形すると

$$0<(x-x')a_2-(x-x')b_2\frac{a_1}{b_1}\Rightarrow 0<(x-x')\left(\frac{a_2}{a_1}-\frac{b_2}{b_1}\right)$$

となる．従って，$\frac{a_2}{a_1}>\frac{b_2}{b_1}$ であるならば $x>x'$ である.

解答例 214

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるので，$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ とすれば

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$A \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

であるのでクラメールの公式より

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & a_{21} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}}{\det(A)}, y_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & 1 \\ a_{12} & 0 \end{pmatrix}}{\det(A)}$$
$$x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 0 & a_{21} \\ 1 & a_{22} \end{pmatrix}}{\det(A)}, y_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{12} & 1 \end{pmatrix}}{\det(A)}$$

解答例 216

$$f(\vec{0}) = f(\vec{0} + \vec{0}) = f(\vec{0}) + f(\vec{0})$$

よって

$$f(\vec{0}) = \vec{0}$$

解答例 217

1. もし $\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix}\right) \neq 0$ であれば逆行列 $\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix}^{-1}$ が存在し，

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix}^{-1} \vec{0}$$
$$\Rightarrow x = \vec{0}$$

となるので矛盾．

2. 行列式を計算すれば，$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{21}a_{12} = 0$．よって，これは λ についての二次

方程式になるのでこれを解くと

$$\lambda = \frac{(a_{11}+a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11}+a_{22}) - 4(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})}}{2}$$

3. 固有値をそれぞれ λ_1, λ_2 とし，それに対応する固有ベクトルを $\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix}$ とすると

$$A\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix}$$
$$A\begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix}$$

となるので，

$$A\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_{11} & \lambda_2 x_{21} \\ \lambda_1 x_{12} & \lambda_2 x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

両辺に X^{-1} を左から掛ければ

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

4.

$$X^{-1}AXX^{-1}AX = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$
$$X^{-1}AAX = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix}$$
$$AA = X\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix}X^{-1}$$

解答例 218

以下では $(x_1, x_2) = x^\top$ と表記する．$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ かつ $a_{12} = a_{21}$ より

$$\begin{aligned} x^\top Ax &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \\ &= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2\right)^2 - \frac{(a_{12})^2}{a_{11}}x^2 + a_{22}x_2^2 \end{aligned}$$

である．従って，$a_{11} > 0$ かつ

$$a_{22} - \frac{(a_{12})^2}{a_{11}} > 0 \tag{13.1}$$

であればどんな x についても $x^\top Ax > 0$ である．(13.1) を計算すると以下のようになる．

$$a_{11}a_{22} > a_{12}^2$$

これは $\det(A) > 0$ と同じ条件である．

解答例 220

1.

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i x - b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 x^2 - 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i x + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \geqq 0$$

であることから，平方完成により

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \left(x - \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \right)^2 + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 \right)$$

となる．

2. $(a_i x - b_i)^2$ はどんな x についても非負であるので，

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 \right) \geqq 0$$

となる．$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geqq 0$ であることから

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 \geqq 0 \\ \Rightarrow \quad & \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \geqq (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \end{aligned}$$

が成立する．

3.

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \\ (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2 &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \end{aligned}$$

であるのでその差を考えると $(|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2 \geqq |\vec{a} + \vec{b}|^2$ となる条件は

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \geqq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2$$

である．2 よりこの不等式が成立するので $(|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2 \geqq |\vec{a} + \vec{b}|^2$ が言える．$|\vec{a} + \vec{b}| \geqq 0$ かつ $|\vec{a}| + |\vec{b}| \geqq 0$ なので $|\vec{a}| + |\vec{b}| \geqq |\vec{a} + \vec{b}|$ となる．

解説

2 の不等式はコーシー＝シュワルツの不等式と呼ばれる．3 の結果は三角不等式と呼ばれる．図を描いて見ればあきらかなように $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の大きさを足したものは $\vec{a}+\vec{b}$ の大きさよりも大きい．

第 14 章

多変数関数の微分

解答例 221

	x^2y	$x+y^2$	x^y	xy	$x^{1/2}+2y^{1/2}$
$(2,3)$	12	11	8	6	$\sqrt{2}+2\sqrt{3}$
$(5,1)$	25	6	5	5	$\sqrt{5}+2$
(x^2,y^2)	x^4y^2	x^2+y^4	x^{2y^2}	x^2y^2	$x+2y$
$(x+h,y)$	$(x+h)^2y$	$(x+h)+y^2$	$(x+h)^y$	$(x+h)y$	$(x+h)^{1/2}+2y^{1/2}$
$(x^3,y+2)$	$x^6(y+2)$	$x^3+(y+2)^2$	$x^{3(y+2)}$	$x^3(y+2)$	$x^{3/2}+2(y+2)^{1/2}$

解答例 222

1.

$$\frac{\partial(x^2y)}{\partial x} = 2xy$$
$$\frac{\partial(x^2y)}{\partial y} = x^2$$

2.

$$\frac{\partial(x+y^2)}{\partial x} = 1$$
$$\frac{\partial(x+y^2)}{\partial y} = 2y$$

3.

$$\frac{\partial(x^{1/3}y^{2/3})}{\partial x} = \frac{1}{3}x^{-2/3}y^{2/3}$$
$$\frac{\partial(x^{1/3}y^{2/3})}{\partial y} = \frac{2}{3}x^{1/3}y^{-1/3}$$

4.

$$\frac{\partial(x^{1/2}+2y^{1/2})}{\partial x} = \frac{1}{2}x^{-1/2}$$
$$\frac{\partial(x^{1/2}+2y^{1/2})}{\partial y} = y^{-1/2}$$

解答例 223

$$
\begin{aligned}
f(x,y) = g(1) &= g(0) + g'(0)1 + \frac{g''(c)1^2}{2} \\
&= f(x',y') + \frac{\partial f(x',y')}{\partial x}(x-x') + \frac{\partial f(x',y')}{\partial y}(y-y') \\
&+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f(b)}{\partial x^2}(x-x')^2 + \frac{\partial^2 f(b)}{\partial x \partial y}(x-x')(y-y') \right. \\
&+ \left. \frac{\partial^2 f(b)}{\partial y \partial x}(x-x')(y-y') + \frac{\partial^2 f(b)}{\partial y^2}(y-y')^2\right]
\end{aligned}
$$

ただし，$b = (cx + (1-c)x', cy + (1-c)y')$.

解答例 224

1. 利潤は

$$p(K^{0.4}L^{0.5}) - wL - rK$$

一階条件は

$$
\begin{aligned}
p(K^{0.4}L^{0.5}K^{-1}) &= r \\
p(K^{0.4}L^{0.5}L^{-1}) &= w
\end{aligned}
$$

となる. したがって，$Kr = wL$，つまり $L = K(r/w)$ となる．これを代入すれば

$$
\begin{aligned}
& pK^{0.4}(Kr/w)^{0.5}K^{-1} = r & \\
\Rightarrow \quad & pK^{0.4+0.5-1}(r/w)^{0.5} = r & (K\text{ をまとめる}) \\
\Rightarrow \quad & pK^{-1/10}(r/w)^{0.5} = r & (K\text{ の指数部分を計算}) \\
\Rightarrow \quad & K^{-1/10} = r^{0.5}w^{0.5}p^{-1} & (K\text{ 以外の部分を右辺へ}) \\
\Rightarrow \quad & K = r^{-5}w^{-5}p^{10} & (\text{両辺を }10\text{ 乗})
\end{aligned}
$$

また，$L = (r/w)K$ であることから $L = r^{-4}w^{-6}p^{10}$ である．

2. 利潤は

$$p(K^{1/2} + L^{1/2}) - wL - rK$$

一階条件は

$$
\begin{aligned}
pK^{-1/2} &= 2r \\
pL^{-1/2} &= 2w
\end{aligned}
$$

したがって，それぞれの両辺を -2 乗すると以下のように計算できる．

$$
\begin{aligned}
K(p,r,w) &= \frac{p^2}{4r^2} \\
L(p,r,w) &= \frac{p^2}{4w^2}
\end{aligned}
$$

解説

1. $(K^{0.4}L^{0.5})$ を K で偏微分すれば $(K^{0.4-1}L^{0.5})$ であるが，-1 乗の部分を $(K^{0.4}L^{0.5})K^{-1}$ と外に出せば $(K^{0.4}L^{0.5})$ の部分が L で偏微分したものと共通になるので計算が便利になる．

解答例 225

利潤関数は次のとおりである．

$$pK^{0.2}L^{0.4}X^{0.3} - rK - wL - vX$$

各要素で偏微分して 0 とおくと

$$0.2pK^{-0.8}L^{0.4}X^{0.3} - r = 0 \tag{14.1}$$
$$0.4pK^{0.2}L^{-0.6}X^{0.3} - w = 0 \tag{14.2}$$
$$0.3pK^{0.2}L^{0.4}X^{-0.7} - v = 0 \tag{14.3}$$

(14.1) を (14.2) で割ると

$$\frac{1}{2}\frac{L}{K} = \frac{r}{w}$$

(14.1) を (14.3) で割ると

$$\frac{2}{3}\frac{X}{K} = \frac{r}{v}$$

従って，

$$L = 2\frac{r}{w}K$$
$$X = \frac{3}{2}\frac{r}{v}K$$

これを (14.1) に代入すると

$$
\begin{aligned}
& 0.2pK^{-0.8}\left(2\frac{r}{w}\right)^{0.4}K^{0.4}\left(\frac{3}{2}\frac{r}{v}\right)^{0.3}K^{0.3}=r \\
\Rightarrow\quad & 0.2pK^{-0.1}\left(2\frac{r}{w}\right)^{0.4}\left(\frac{3}{2}\frac{r}{v}\right)^{0.3}=r && (K\text{ をまとめる}) \\
\Rightarrow\quad & K^{-1}\left(\frac{0.2p}{r}\right)^{10}\left(2\frac{r}{w}\right)^{4}\left(\frac{3}{2}\frac{r}{v}\right)^{3}=1 && (\text{両辺を }10\text{ 乗}) \\
\Rightarrow\quad & \left(\frac{0.2p}{r}\right)^{10}\left(2\frac{r}{w}\right)^{4}\left(\frac{3}{2}\frac{r}{v}\right)^{3}=K && (K\text{ を右辺に}) \\
\Rightarrow\quad & K=\left(\frac{0.2p}{r}\right)^{10}\left(2\frac{r}{w}\right)^{4}\left(\frac{3}{2}\frac{r}{v}\right)^{3} && (\text{左辺と右辺入れ替え}) \\
\Rightarrow\quad & K=(0.2p)^{10}\frac{1}{r^3}\left(2\frac{1}{w}\right)^{4}\left(\frac{3}{2}\frac{1}{v}\right)^{3} && (r\text{ をまとめる}) \\
\Rightarrow\quad & K=(0.2)^{10}2^4(\frac{3}{2})^3\frac{p^{10}}{r^3w^4v^3} && (\text{文字と数字を分ける}) \\
\Rightarrow\quad & K=\frac{2\cdot 3^3}{5^{10}}\frac{p^{10}}{r^3w^4v^3} && (\text{数字を計算})
\end{aligned}
$$

また $\begin{cases} L=2\dfrac{r}{w}K \\ X=\dfrac{3}{2}\dfrac{r}{v}K \end{cases}$ を使うと残りの L, X は以下のように計算できる．

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{4\cdot 3^3}{5^{10}}\frac{p^{10}}{r^2w^5v^3} \\
X &= \frac{3^4}{5^{10}}\frac{p^{10}}{r^2w^4v^4}
\end{aligned}
$$

解答例 226

利潤関数は

$$
p(K^{1/2}+L^{1/2}+X^{1/2})-rK-wL-vX
$$

一階の条件より

$$
\begin{aligned}
pK^{-1/2} &= r \\
pL^{-1/2} &= w \\
pX^{-1/2} &= v
\end{aligned}
$$

各式の両辺を二乗すると

$$
\begin{aligned}
p^2K^{-1} &= r^2 \\
p^2L^{-1} &= w^2 \\
p^2X^{-1} &= v^2
\end{aligned}
$$

従って

$$K = \frac{p^2}{r^2}$$
$$L = \frac{p^2}{w^2}$$
$$X = \frac{p^2}{v^2}$$

解答例 228

1. 問題 224 より

$$\frac{\partial K(p,r,w)}{\partial r} = -5r^{-6}w^{-5}p^{10}$$

2. 問題 224 より

$$K(p,r,w) = p^2/r^2$$
$$L(p,r,w) = p^2/w^2$$

このとき，$\frac{\partial K(p,r,w)}{\partial r} = -2p^2/r^3$.

解説

ヘッセ行列を使っても良い．

解答例 229

f が点 (x^*, y^*) で極大値をとっているので，十分小さい h について，

$$f(x^* + h, y^*) \leqq f(x^*, y^*)$$

が成り立つ．偏微分の定義より $\frac{\partial f(x^*,y^*)}{\partial x} \leqq 0$. 同様に

$$f(x^* - h, y^*) \leqq f(x^*, y^*)$$

が成立するので $\frac{\partial f(x^*,y^*)}{\partial x} \geqq 0$. したがって，$\frac{\partial f(x^*,y^*)}{\partial x} = 0$. 同様の操作を y についても行う．

解答例 230

必要条件であることは問題 229 と同様に示すことができる．十分条件であることを示す．

$$\frac{\partial f(x^*,y^*)}{\partial x} = \frac{\partial f(x^*,y^*)}{\partial y} = 0$$

であるとする．f は凹関数であるので

$$f(x,y)-f(x^*,y^*) \leqq \frac{\partial f(x^*,y^*)}{\partial x}(x-x^*)+\frac{\partial f(x^*,y^*)}{\partial y}(y-y^*)$$

が言える．したがって $\frac{\partial f(x^*,y^*)}{\partial x}=\frac{\partial f(x^*,y^*)}{\partial y}=0$ を上の式に代入すれば $f(x,y) \leqq f(x^*,y^*)$ となる．よって f は (x^*,y^*) で最大値を取る．

解答例 231

(a) 問題 223 より

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x',y')+\frac{\partial f(x',y')}{\partial x}(x-x')+\frac{\partial f(x',y')}{\partial y}(y-y') \\ &\quad +(x-x',y-y')\cdot H_{f(x',y')}\begin{bmatrix} x-x' \\ y-y' \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow f(x,y)-f(x',y')-[\frac{\partial f(x',y')}{\partial x}(x-x')+\frac{\partial f(x',y')}{\partial y}(y-y')] \\ &= (x-x',y-y')\cdot H_{f(x',y')}\begin{bmatrix} x-x' \\ y-y' \end{bmatrix} \end{aligned}$$

よって $f(x,y)-f(x',y')-\left[\frac{\partial f(x',y')}{\partial x}(x-x')+\frac{\partial f(x',y')}{\partial y}(y-y')\right] \leqq 0$ であることから $(x-x',y-y')\cdot H_{f(x',y')}\begin{bmatrix} x-x' \\ y-y' \end{bmatrix} \leqq 0$ である．従って f のヘッセ行列が負値定符号であれば f は凹関数である．

(b) 問題 219 と (a) の結果から従う．

解答例 232

効用最大化条件から

$$v'(D(p))=p$$

これを p で微分すると，すべての q について $v''(q)<0$ であることから次の結果が言える．

$$v''(D(p))\times D'(p)=1 \qquad \Rightarrow \qquad D'(p)=1/v''(D(p))<0$$

$x(a)=\arg\max_x f(x,a)$ であることから，$x=x(a)$ のとき，$\frac{\partial f}{\partial x}(x,a)=0$ である．よって，この式に $x=x(a)$ を代入したものである $\frac{\partial f}{\partial x}(x(a),a)=0$ の両辺を a で微分すると

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x(a),a)\cdot x'(a)+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial a}(x(a),a)=0 \tag{14.4}$$

となり，これを整理すると，

$$x'(a)=-\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial a}(x(a),a)}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x(a),a)}$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x(a), a) < 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial a} < 0$ であることから，$x'(a) < 0$ である．

解説

(14.4) 式の $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x(a), a) \cdot x'(a)$ の部分はチェーンルールによる．a で微分すると，$x(a)$ を通じて f に作用する部分と，a が f に直接作用する部分に分かれることに注意する．

第 15 章

制約付き最適化問題

解答例 234

ラグランジュ関数は次のとおり

$$q_x^{1/3} q_y^{2/3} + \lambda(I - p_x q_x - p_y q_y)$$

一階の条件により

$$(1/3) q_x^{-2/3} q_y^{2/3} - \lambda p_x = 0 \tag{15.1}$$
$$(2/3) q_x^{1/3} q_y^{-1/3} - \lambda p_y = 0 \tag{15.2}$$

(15.1) を (15.2) で割ると

$$\frac{1}{2}\frac{q_y}{q_x} = \frac{p_x}{p_y}$$

これを整理すると

$$p_y q_y = 2 p_x q_x$$

さらにこの式を予算制約式，$I = p_x q_x + p_y q_y$ に代入すると

$$I = p_x q_x + 2 p_x q_x = 3 p_x q_x$$

従って

$$q_x = \frac{I}{3 p_x}$$

さらに $p_y q_y = 2 p_x q_x$ から

$$q_y = \frac{2I}{3 p_y}$$

解答例 235

ラグランジュ関数は

$$q_x^{1/2} q_y^{1/3} q_z^{1/6} + \lambda(I - p_x q_x - p_y q_y - p_z q_z)$$

一階の条件により

$$(1/2) q_x^{-1/2} q_y^{1/3} q_z^{1/6} = \lambda p_x \tag{15.3}$$
$$(1/3) q_x^{1/2} q_y^{-2/3} q_z^{1/6} = \lambda p_y \tag{15.4}$$
$$(1/6) q_x^{1/2} q_y^{1/3} q_z^{-5/6} = \lambda p_z \tag{15.5}$$

(15.3) の左辺と右辺をそれぞれ (15.4) の左辺と右辺で割ると以下の等式が成り立つ．

$$\frac{3}{2}\frac{q_y}{q_x} = \frac{p_x}{p_y}$$

同様に (15.3) の左辺と右辺をそれぞれ (15.5) の左辺と右辺で割ると以下の等式が成り立つ．

$$3\frac{q_z}{q_x} = \frac{p_x}{p_z}$$

従って以下の二つの等式が成り立つ．

$$\begin{aligned} p_y q_y &= \frac{2}{3} p_x q_x \\ p_z q_z &= \frac{1}{3} p_x q_x \end{aligned}$$

これを予算制約，$I = p_x q_x + p_y q_y + p_z q_z$ に代入すると

$$\begin{aligned} & I = p_x q_x + \frac{2}{3} p_x q_x + \frac{1}{3} p_x q_x & \\ \Rightarrow\quad & I = 2 p_x q_x & (p_x q_x \text{ をまとめる}) \\ \Rightarrow\quad & q_x = \frac{I}{2 p_x} & (q_x \text{ について方程式を解く}) \end{aligned}$$

これより $\begin{cases} p_y q_y = \frac{2}{3} p_x q_x \\ p_z q_z = \frac{1}{3} p_x q_x \end{cases}$ を使うと残りの q_y, q_z を以下のように求めることができる．

$$\begin{aligned} q_y &= \frac{1}{3}\frac{I}{p_y} \\ q_z &= \frac{1}{6}\frac{I}{p_z} \end{aligned}$$

解答例 236

ラグランジュ関数は次のとおりである.

$$(x_1)^{\frac{1}{10}}(x_2)^{\frac{2}{10}}(x_3)^{\frac{3}{10}}(x_4)^{\frac{4}{10}}+\lambda_1(x_1+x_2-3)+\lambda_2(x_3+x_4-7)$$

一階の条件から以下の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\frac{1}{10}x_1^{-1}u&=\lambda_1\\ \frac{2}{10}x_2^{-1}u&=\lambda_1\\ \frac{3}{10}x_3^{-1}u&=\lambda_2\\ \frac{4}{10}x_4^{-1}u&=\lambda_2\end{aligned}$$

ただし u は以下で定められる数である.

$$u=(x_1)^{\frac{1}{10}}(x_2)^{\frac{2}{10}}(x_3)^{\frac{3}{10}}(x_4)^{\frac{4}{10}}.$$

よって, $2x_1=x_2, 4x_3=3x_4$ が成立する. これと制約式 $x_1+x_2=3, x_3+x_4=7$ より, 最適解は $x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=4$ である.

解答例 239

(a) ラグランジュ関数は

$$-(p_xq_x+p_yq_y)+\lambda(u(q_x,q_y)-u)$$

(b) ラグランジュ関数は

$$-(p_xq_x+p_yq_y)+\lambda(q_x^{1/3}q_y^{2/3}-u)$$

一階の条件より

$$\begin{aligned}-p_x+\lambda(1/3)q_x^{-2/3}q_y^{2/3}&=0\\ -p_y+\lambda(2/3)q_x^{1/3}q_y^{-1/3}&=0\end{aligned}$$

上の式を下の式で割ると

$$\frac{p_x}{p_y}=\frac{1}{2}\frac{q_y}{q_x}$$

従って

$$q_y=\frac{2p_xq_x}{p_y}$$

これを制約条件，$q_x^{1/3} q_y^{2/3} = u$ に代入すると

$$
\begin{aligned}
& q_x^{1/3} \left(\frac{2 p_x q_x}{p_y} \right)^{2/3} = u \\
\Rightarrow \quad & q_x \left(2 \frac{p_x}{p_y} \right)^{2/3} = u \\
\Rightarrow \quad & q_x = \left(\frac{p_y}{2 p_x} \right)^{2/3} u
\end{aligned}
$$

また，$q_y = \frac{2 p_x q_x}{p_y}$ を使うと

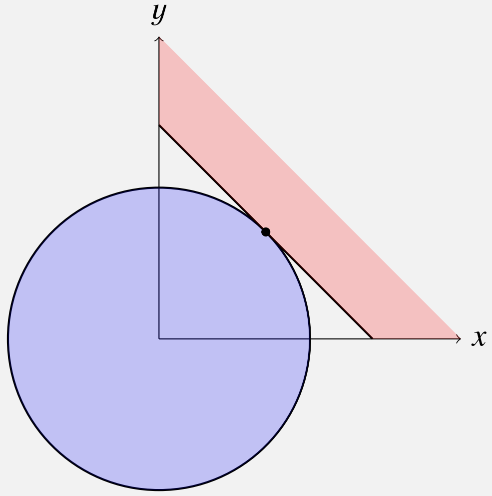
$$
q_y = \left(\frac{2 p_x}{p_y} \right)^{1/3} u
$$

解答例 242

制約を満たす点が $x = y = \sqrt{2}/2$ しかないのでそれが最大化解.

解説

1. 以下のように図を書けば制約を満たす領域は以下の図の円と台形が重なる領域であり，それは $x = y = \sqrt{2}/2$ となる点ただひとつである．



2. 制約を満たす点が $x = y = \sqrt{2}/2$ しかないことは以下のように証明できる．
$x + y \geqq \sqrt{2}$ から $(x + y)^2 \geqq 2$ である．したがって，$x^2 + y^2 \geqq 2(1 - xy)$ となる．$x + y \geqq 2\sqrt{xy}$ である（$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geqq 0$ を展開すれば良い）ので，$xy \leqq 1/2$ となり

$$\begin{aligned} & 1/2 \geqq xy \\ \Rightarrow \quad & 1/2 - xy \geqq 0 \\ \Rightarrow \quad & 1 - xy \geqq 1/2 \\ \Rightarrow \quad & 2(1 - xy) \geqq 1 \end{aligned}$$

である．よって $x^2 + y^2 \geqq 1$ となる．したがって，$x^2 + y^2 \leqq 1$ を満たすためには $x^2 + y^2 = 1$ が満たされなければいけない．このためには $x^2 + y^2 = 2(1 - xy) = 1$ が成立していなければならないので $xy = 1/2$ であり，これより $y = \frac{x}{2}$ となるのでこれを $x^2 + y^2 = 1$ に代入すれば $x = y = \sqrt{2}/2$ であることがわかる．
3. このように制約が複数ある場合，その制約を満たすものが存在するかどうか，存在したとしてそれはどのようなものかを考えることが大事である．

解答例 243

制約式から x_1 はいくらでも大きくできるので，x_1 を大きくすれば目的関数はいくらでも大きくなる．つまりこの目的関数には与えられた制約の下でも最大値が存在しない．よって最大化問題の解は存在しない．

解答例 244

$x_1 = x_2 = 1$ は制約をすべて満たし，その点で目的関数は 0 となる．目的関数の値は正にならないので $x_1 = x_2 = 1$ が最大化解である．

解答例 247

間接効用関数は

$$\begin{aligned} v(p_x, p_y, I) = u(&d_x(p_x, p_y, I), d_y(p_x, p_y, I)) \\ &+\lambda(I - p_x d_x(p_x, p_y, I) - p_y d_y(p_x, p_y, I)) \end{aligned}$$

となる．何故ならば予算制約より $I = p_x d_x(p_x, p_y, I) + p_y d_y(p_x, p_y, I)$ が満たされるからである．左辺はラグランジュ関数であるので包絡線定理を使うと

$$\frac{\partial v(p_x, p_y, I)}{\partial p_x} = -\lambda q_x(p_x, p_y, I)$$

一方で，間接効用関数を I で微分すると包絡線定理より

$$\frac{\partial v(p_x, p_y, I)}{\partial I} = \lambda$$

従って

$$d_x(p_x, p_y, I) = -\frac{\frac{\partial v(p_x, p_y, I)}{\partial p_x}}{\frac{\partial v(p_x, p_y, I)}{\partial I}}$$

と書ける．（これをロアの恒等式と呼ぶ）

解答例 248

ヒックスの需要関数を $h_x(p_x, p_y, u), h_y(p_x, p_y, u)$ で表す．ヒックス需要関数では，効用の値が u に一致するので

$$\begin{aligned} -(p_x h_x(p_x, p_y, u) + p_y h_y(p_x, p_y, u)) = -(&p_x h_x(p_x, p_y, u) + p_y h_y(p_x, p_y, u)) \\ &+\lambda(u(h_x(p_x, p_y, u), h_y(p_x, p_y, u)) - u) \end{aligned}$$

が満たされる．左辺は支出関数にマイナスをかけたものである．右辺は支出最小化問題のラグランジュ関数である．

従って，支出関数を p_x で微分すると，包絡線定理より，$h_x(p_x, p_y, u)$ となる．

解説

これをシェパードの補題[a]と呼ぶ．

[a] 補題は補助定理とも呼ばれ，何かの定理を証明するために使う中間的な定理のことを言う．定理・命題・補題の使い分けは明確な基準があるわけでなく，割と主観的．

解答例 249

一次同次の定義より

$$\begin{aligned} v(p_1,p_2,I) &= \max_{q_1,q_2} u(q_1,q_2) \text{ s.t. } p_1q_1+p_2q_2=I \\ &= \max_{q_1,q_2} \frac{1}{\alpha}u(\alpha q_1,\alpha q_2) \text{ s.t. } p_1q_1+p_2q_2=I \\ &= \max_{q_1,q_2} \frac{1}{\alpha}u(\alpha q_1,\alpha q_2) \text{ s.t. } p_1\alpha q_1+p_2\alpha q_2=\alpha I \\ &= \max_{q_1',q_2'} \frac{1}{\alpha}u(q_1',q_2') \text{ s.t. } p_1q_1'+p_2q_2'=\alpha I \\ &= \frac{1}{\alpha}v(p_1,p_2,\alpha I) \end{aligned}$$

したがって，$v(p_1,p_2,\alpha I)=\alpha\times v(p_1,p_2,I)$

解答例 250

(a) ラグランジュ関数を以下のようにおく．

$$L(q_1,q_2,\lambda)=u(q_1,q_2)+\lambda(I-(1+t_1)p_1q_1-(1+t_2)p_2q_2)$$

ラグランジュの一階条件より

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\frac{1}{q_1} &= \lambda p_1(1+t_1) \\ \frac{2}{3}\frac{1}{q_2} &= \lambda p_2(1+t_2) \end{aligned}$$

であるので

$$2q_1p_1(1+t_1)=q_2p_2(1+t_2)$$

となる．よって予算制約から $q_1=\frac{1}{3}\frac{I}{c_1}, q_2=\frac{2}{3}\frac{I}{c_2}$ である．

(b) ラグランジュ乗数の λ の値は，$\frac{1}{3}\frac{1}{q_1}=\lambda p_1(1+t_1)$ に q_1 の値を代入すれば $\lambda=1/I$ である．

(c) 包絡線定理から間接効用関数を v とすれば

$$\frac{\partial v}{\partial t_1}=-\lambda q_1p_1$$

一階条件から

$$\lambda = \frac{1}{3}\frac{1}{q_1}\frac{1}{p_1(1+t_1)}$$

であるので

$$\frac{\partial v}{\partial t_1} = -\lambda q_1 p_1 = -\frac{1}{3}\frac{1}{1+t_1}$$

(d) 包絡線定理から間接効用関数を v とすれば同様に

$$\frac{\partial v}{\partial t_2} = -\lambda q_2 p_2 = -\frac{2}{3}\frac{1}{1+t_2}$$

(e) 政府の目的関数を W とすれば一階条件は次の形で書ける．

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial t_1} &= \frac{\partial v}{\partial t_1} + \alpha\left[p_1 q_1 + p_1 t_1 \frac{\partial q_1}{\partial c_1}\frac{\partial c_1}{\partial t_1} + p_2 t_2 \frac{\partial q_2}{\partial t_1}\frac{\partial c_1}{\partial t_1}\right] = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial t_2} &= \frac{\partial v}{\partial t_2} + \alpha\left[p_2 q_2 + p_1 t_1 \frac{\partial q_1}{\partial c_2}\frac{\partial c_2}{\partial t_2} + p_2 t_2 \frac{\partial q_2}{\partial c_2}\frac{\partial c_2}{\partial t_2}\right] = 0\end{aligned}$$

よって $\frac{\partial v}{\partial t_1} = -\lambda q_1 p_1$，$\frac{\partial v}{\partial t_2} = -\lambda q_2 p_2$，$\frac{\partial q_2}{\partial c_1} = \frac{\partial q_1}{\partial c_2} = 0$ および $c_i = p_i(1+t_i)$ であることから以下の等式が成立する．

$$\begin{aligned}(\lambda-\alpha)q_1 p_1 &= \alpha p_1 t_1 \frac{\partial q_1}{\partial c_1} p_1 \\ (\lambda-\alpha)q_2 p_2 &= \alpha p_2 t_2 \frac{\partial q_2}{\partial c_2} p_2\end{aligned}$$

これを整理すれば以下のようになる．

$$\begin{aligned}t_1 &= \frac{(\lambda-\alpha)}{\alpha}\frac{1}{\frac{p_1}{q_1}\frac{\partial q_1}{\partial c_1}} \\ t_2 &= \frac{(\lambda-\alpha)}{\alpha}\frac{1}{\frac{p_2}{q_2}\frac{\partial q_2}{\partial c_2}}\end{aligned}$$

$\lambda = 1/I < \alpha$ であり，$\frac{\partial q_i}{\partial c_i} < 0$ であるので，$|\frac{p_1}{q_1}\frac{\partial q_1}{\partial c_1}| < |\frac{p_2}{q_2}\frac{\partial q_2}{\partial c_2}|$ ならば $t_1 > t_2$ である．

解説

- 問題 (e) の結果は「ラムゼイの逆弾力性ルール」と呼ばれる結果である．$\frac{p_i}{q_i}\frac{\partial q_i}{\partial c_i}$ は財 i の需要の価格弾力性であり，最適な税率はこの需要の価格弾力性の逆数に比例することに由来する．

解答例 251

1. アダムの所得を $I = p_x e_{アx} + p_y e_{アy} = 4p_y$ として効用最大化問題を解くと

$$d_{アx}(p_x, p_y) = \frac{I}{2p_x} = \frac{2p_y}{p_x}$$
$$d_{アy}(p_x, p_y) = \frac{I}{2p_y} = 2$$

2. イブの所得を $I = p_x e_{イx} + p_y e_{イy} = 2p_x$ として効用最大化問題を解くと

$$d_{イx}(p_x, p_y) = \frac{I}{3p_x} = \frac{2}{3}$$
$$d_{イy}(p_x, p_y) = \frac{2I}{3p_y} = \frac{4p_x}{3p_y}$$

3. 財 x の市場を考える．x の需要の合計は総供給，2 に一致していなければならないので

$$2\frac{p_y}{p_x} + \frac{2}{3} = 2$$

これを整理すると

$$\frac{p_y}{p_x} = \frac{2}{3}$$

財 y の市場を考える．y の需要の合計は総供給，4 に一致していなければならないので

$$\frac{4p_x}{3p_y} + 2 = 4$$

これを整理すると

$$\frac{p_y}{p_x} = \frac{2}{3}$$

となる．[*1]

従って均衡価格比は $\frac{p_y}{p_x} = \frac{2}{3}$．これを 1，2 のアダムとイヴの需要関数に代入すればアダムの財配分は $(q_{アx}, q_{アy}) = (4/3, 2)$, イブの財配分は $(q_{イx}, q_{イy}) = (2/3, 2)$ であることがわかる．

[*1] 財の種類が n 種類あると $n-1$ 種類の財市場の需給が一致していれば残りの 1 種類の財市場でも需給が一致する．これをワルラス法則と呼ぶ．

第 16 章

動学システムと最適化

解答例 253

1. t 日目の価格 p_t は $D(p_t) = S(p_{t-1})$ となるようにきまるので，

$$\begin{aligned} & & D(p_t) &= S(p_{t-1}) \\ \Rightarrow & & 10 - ap_t &= bp_{t-1} + 5 \\ \Rightarrow & & -ap_t &= bp_{t-1} - 5 \\ \Rightarrow & & p_t &= \frac{5 - bp_{t-1}}{a} \end{aligned}$$

2. 不動点では $p_t = p_{t-1} = p$ が成立する．つまり

$$\begin{aligned} & & p_t &= \frac{5 - bp_{t-1}}{a} \\ \Rightarrow & & p &= \frac{5 - bp}{a} \\ \Rightarrow & & ap &= 5 - bp \\ \Rightarrow & & (a+b)p &= 5 \\ \Rightarrow & & p &= \frac{5}{a+b} \end{aligned}$$

3. 動学システムは $p_t = f(p_{t-1}) = \frac{5-bp_{t-1}}{a}$ と書くことができるので，不動点が局所安定である条件は $|f'(p)| < 1$ である．

$$f'(p) = -b/a$$

であるのでその条件は $|b/a| < 1$.

解答例 255

$x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ とおけば $f(x_0) = x_1$, $f(x_1) = x_2$, $f(x_2) = x_0$ となるので $\{0, 1, 2\}$ は 3 周期点.

解答例 257

1. $W(A) = \max_x u(x) + \delta W(A-x)$.
2. $W_0(a) = 0$ より

$$\begin{aligned} W_1(A) &= \max_x \{u(x) + \delta W_0(A-x)\} \\ &= \max_x u(x) \\ &= \max_x x^{1/2} \\ &= A^{1/2} \end{aligned}$$

3. 2 より

$$\begin{aligned} W_2(A) &= \max_x \{u(x) + \delta W_1(A-x)\} \\ &= \max_x \{(x)^{1/2} + \delta(A-x)^{1/2}\} \end{aligned}$$

より $(x)^{1/2} + (A-x)^{1/2}$ を x について最大化するために 1 階条件を見れば

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left(x^{-1/2} - \delta(A-x)^{-1/2}\right) = 0 \\ \Rightarrow\quad & x^{-1/2} - \delta(A-x)^{-1/2} = 0 \\ \Rightarrow\quad & x^{-1/2} = \delta(A-x)^{-1/2} \\ \Rightarrow\quad & x = \frac{1}{\delta^2}(A-x) \\ \Rightarrow\quad & x(1+\frac{1}{\delta^2}) = \frac{1}{\delta^2}A \\ \Rightarrow\quad & x(\frac{1+\delta^2}{\delta^2}) = \frac{1}{\delta^2}A \\ \Rightarrow\quad & x = \frac{1}{1+\delta^2}A \end{aligned}$$

したがって，$x = \frac{1}{1+\delta^2}A$ を $(x)^{1/2} + \delta(A-x)^{1/2}$ に代入すれば

$$\begin{aligned} W_2(A) &= \left(\frac{1}{1+\delta^2}A\right)^{1/2} + \delta\left(\frac{1-\delta^2}{1+\delta^2}A\right)^{1/2} \\ &= \left[\left(\frac{1}{1+\delta^2}\right)^{1/2} + \delta\left(\frac{1-\delta^2}{1+\delta^2}\right)^{1/2}\right] A^{1/2} \end{aligned}$$

4. 推測として，$W(A) = aA^{1/2}$ とする．このとき，

$$\max_x \{u(x) + \delta W(A-x)\} = x^{1/2} + \delta a(A-x)^{1/2}$$

であるので，最大化解は

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\left(x^{-1/2} - \delta a(A-x)^{-1/2}\right) = 0 \\
\Rightarrow\quad & x^{-1/2} - \delta a(A-x)^{-1/2} = 0 \\
\Rightarrow\quad & x^{-1/2} = \delta a(A-x)^{-1/2} \\
\Rightarrow\quad & x = \frac{1}{(\delta a)^2}(A-x) \\
\Rightarrow\quad & x(1+\frac{1}{(\delta a)^2}) = \frac{1}{(\delta a)^2}A \\
\Rightarrow\quad & x(\frac{1+(\delta a)^2}{(\delta a)^2}) = \frac{1}{(\delta a)^2}A \\
\Rightarrow\quad & x = \frac{1}{1+(\delta a)^2}A
\end{aligned}
$$

となるので，

$$
aA^{1/2} = W(A) = \left[\left(\frac{1}{1+(\delta a)^2}\right)^{1/2} + \delta\left(\frac{1-(\delta a)^2}{1+(\delta a)^2}\right)^{1/2}\right]A^{1/2}
$$

となる．
よって $A^{1/2}$ の係数を比較すれば

$$
a = \left(\frac{1}{1+(\delta a)^2}\right)^{1/2} + \delta\left(\frac{1-(\delta a)^2}{1+(\delta a)^2}\right)^{1/2}
$$

a は上の方程式を満たす実数とすれば $W(A) = aA^{1/2}$ である．

5. $x_1 = \frac{1}{1+(\delta a)^2}A$ である．また，

$$
x_2 = \frac{1}{1+(\delta a)^2}(A-x_1) = \left[\frac{1}{1+(\delta a)^2} - \left(\frac{1}{1+(\delta a)^2}\right)^2\right]A
$$

である．同様に

$$
x_k = \frac{1}{1+(\delta a)^2}\left(A - \sum_{i=1}^{k-1} x_i\right)
$$

であることから

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} x_i &= \frac{1}{1+(\delta a)^2}\left(A - \sum_{i=1}^{k-1} x_i\right) + \sum_{i=1}^{k-1} x_i \\
&= \frac{1}{1+(\delta a)^2}A + \frac{(\delta a)^2}{1+(\delta a)^2}\sum_{i=1}^{k-1} x_i
\end{aligned}
$$

である．よって $\sum_{i=1}^{k} x_i = a_k$ とおく．$b_k = A - \sum_{i=1}^{k} x_i$ とおけば

$$b_k = \frac{(\delta a)^2}{1+(\delta a)^2} b_{k-1}$$

であるので

$$b_k = \left(\frac{(\delta a)^2}{1+(\delta a)^2}\right)^k A$$

となる．したがって $x_k = \frac{1}{1+(\delta a)^2} b_{k-1}$ と書けることから

$$x_k = \frac{1}{1+(\delta a)^2}\left(\frac{(\delta a)^2}{1+(\delta a)^2}\right)^{k-1} A$$

である.

解説

1. ベルマン方程式については本文 16 章を参照してください．
2. $\max_x(u(x)+\delta W_0(A-x))$ は $u(x)+\delta W_0(A-x)$ の最大値である．合計金額が A 以下であることから $x \leqq A$ であることに注意．
3. 2 の答えを代入して最大化解を考える．一階条件は通常のものを考える．
4. 3 から $W_2(A)$ は $A^{1/2}$ の定数倍である．$W(A)$ は $A^{1/2}$ の定数倍であることが推測される．実際その推測をもとにベルマン方程式を解けば $W(A)$ が $A^{1/2}$ の低数倍になっていることから推測が正しいと考えられる．
   また以下の方程式を満たす a は存在する．
   $$a = \left(\frac{1}{1+(\delta a)^2}\right)^{1/2} + \delta\left(\frac{1-(\delta a)^2}{1+(\delta a)^2}\right)^{1/2}$$
   これを見るには右辺を $f(a)$ とおき，$f(0) > 0$ と $\lim_{x\to\infty} f(x) = \delta$ であることを使えば中間値の定理から $a = f(a)$ となる不動点の存在を確かめることができる．
   また $f'(a) < 0$ からその不動点がただひとつであることも確かめられる（これは $a = f(a)$ としたとき，$a' > a$ なら $a' > a = f(a) > f(a')$，$a' < a$ ならば $a' < a = f(a) < f(a')$ となり，a 以外は不動点となりえないことに注意する.）.
   この例のように方程式を解き，具体的に a を求めることが難しい場合，存在（とただひとつだけであること）を示すことで，解になることの証明とすることも多い．
5. この問題を解くには次の形の数列を考える必要がある．
   $$a_t = \beta a_{t-1} + b$$
   こういった数列の場合，両辺から $\frac{b}{1-\beta}$ を引けば
   $$\begin{aligned} a_t - \frac{b}{1-\beta} &= \beta a_{t-1} + b - \frac{b}{1-\beta} \\ &= \beta a_{t-1} - \beta\frac{b}{1-\beta} \\ &= \beta\left(a_{t-1} - \frac{b}{1-\beta}\right) \end{aligned}$$
   となるので $b_t = a_t - \frac{b}{1-\beta}$ というように新しい数列 (b_t) を定義すれば b_t は等比数列になる．
   どうやってそういうことを思いつけばいいかというと，ちょっと変形すれば等比数列になってくれないかな，なってくれたら簡単なのにな，くらいの発想で試してみることである．うまくいけばそれで良いし，うまくいかなければ他の方法で試行錯誤である．
   この場合，$b_t = \beta b_{t-1}$ になるように考えて，$b_t = a_t + X$ としてやる．そうすると $b_t = a_t + X = \beta b_{t-1} = \beta a_{t-1} + \beta X$ となるので，$a_t + X = \beta a_{t-1} + \beta X$ であることから $a_t = \beta a_{t-1} + (\beta - 1)X$ となる．あとは辻褄が合うように $(\beta-1)X = b$ として X を計算すればよい．

第 17 章

追加問題

第一刷時追加分

以降，もし増刷すれば解答例か新しい問題を追加するかもしれません．

基礎の計算

論理と集合

不等式

関数

解答例 263

集合 $\{x \in A \colon f(x) \geqq x\}$ と $\{x \in A \colon f(x) \leqq x\}$ のいずれかは空集合ではない．$\{x \in A \colon f(x) \geqq x\}$ が空集合ではないとし，その最大値を x とする．このとき，$f(x) \geqq x$ であることから $f(f(x)) \geqq f(x)$ が成立するので $f(x) \in A$ である．x が A の最大値であることから $x \geqq f(x)$ となり，$x = f(x)$ が言える．

解説

これはタルスキの不動点定理と呼ばれる結果の特殊ケースである．

二次関数

数列と極限

解答例 268

1. k, n, ℓ が整数であるので a_ℓ^k は有理数である．
2. $|a_\ell^k - a_{\ell+1}^k| = \frac{n}{k}$ である．$k \to \infty$ であれば $|a_\ell^k - a_{\ell+1}^k| \to 0$ である．
3. すべての k について，$a_k^k = n$ であることから，$x < a_k^k$ である．もし $a_{k-1}^k \leqq x$ であれば証明終了である．そうでないとすれば $x < a_{k-1}^k$ である．このプロセスを繰り返していき，$a_\ell^k \leqq x$ となった時点で止める．もし止まらないのであれば $x < 0$ となることを意味するが，これは前提に矛盾する．したがって，どこかの ℓ で $a_\ell^k \leqq x$ が成り立つ．また，$\ell + 1$ のときに止まらなかったことから $x < a_{\ell+1}^k$ である．
4. k を十分大きくすれば $|a_\ell^k - a_{\ell+1}^k| < \varepsilon$ である．したがって，$|a_\ell^k - x| < \varepsilon$ となる．a_ℓ^k は有理数であるので証明終了である．

解説

この性質は有理数の稠密性（ちゅうみつせい）と呼ばれる．

解答例 269

1. $x > 0$ であることから，$1/x > 0$ である．いま $\sqrt{2}/x$ を考えると，これは実数なので，$n > \sqrt{2}/x$ となるような整数 n が存在する．したがって $x > \sqrt{2}/n$ である．
2. $\frac{x}{\sqrt{2}/n}$ が実数であることを用いれば，1 と同様にして示すことができる．
3. k, n, ℓ, m が整数であるので $\frac{m\ell}{kn}$ は有理数である．もし $a_\ell^k = \frac{m\ell}{kn}\sqrt{2}$ が有理数であれば
$$\frac{a_\ell^k}{\frac{m\ell}{kn}} = \sqrt{2}$$
であるので，$\sqrt{2}$ が無理数であることから矛盾する．したがって，a_ℓ^k は無理数である．
4. $|a_\ell^k - a_{\ell+1}^k| = \frac{n}{k}\sqrt{2}$ である．$k \to \infty$ であれば $|a_\ell^k - a_{\ell+1}^k| \to 0$ である．
5. すべての k について，$a_k^k = \frac{m}{n}\sqrt{2}$ であることから，$x < a_k^k$ である．もし $a_{k-1}^k \leqq x$ であれば証明終了である．そうでないとすれば $x < a_{k-1}^k$ である．このプロセスを繰り返していき，$a_\ell^k \leqq x$ となった時点で止める．もし止まらないのであれば $x < \frac{m}{k}\frac{1}{n}\sqrt{2} < \frac{1}{n}\sqrt{2}$ となることを意味するが，これは前提に矛盾する．したがって，どこかの ℓ で $a_\ell^k \leqq x$ が成り立つ．また，$\ell + 1$ のときに止まらなかったことから $x < a_{\ell+1}^k$ である．
6. k を十分大きくすれば $|a_\ell^k - a_{\ell+1}^k| < \varepsilon$ である．したがって，$|a_\ell^k - x| < \varepsilon$ となる．a_ℓ^k は無理数であるので証明終了である．

確率

連続関数

一変数関数の微分

解答例 275

1. 0
2. 0
3. $2x$
4. 0
5. 0

解答例 277

問題 189 より $f(x) = \ln(x)$ としたときに $f'(x) > 0$ を示せば良い．$f'(x) = 1/x > 0$ であるので証明終了である．
また，$a > 1$ より $\ln(a) > \ln(1) = 0$ である．

解答例 278

問題 189 より $f(x) = a^x$ としたときに $f'(x) > 0$ を示せば良い．したがって，$f'(x) = a^x \ln(a) > 0$ となるので十分である．ただし $\ln(a) > 0$ であることを用いている（問題 277）．

解答例 281

$f(a) = g(a) = 0$ であるので

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

したがって，問題 280 の結果から以下を満たす c が a と x の間に存在する．

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

したがって，$x \to a$ とすれば，はさみうちの定理から $c \to a$ であるので以下の等式が成立する．

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

解説

- この結果はロピタルの定理と呼ばれる．

解答例 292

1. 請求金額を y とすると，買い手の効用が y 以上である確率は $1-F(y)$ であり，そのときの売上金は y である．したがって，売上金額の期待値は $(1-F(y))y$ である．これを微分すれば一階の条件は

$$1-F(y)-f(y)y=0$$

であるので，それを整理すると $y=\frac{1-F(y)}{f(y)}$.

2. $g(y)=\frac{1-F(y)}{f(y)}$ とおくと，これが y について減少的であれば $g'(y)<0$ である．
一方で，$\ln[(1-F(y))y]=\ln(1-F(y))+y$ の一回の微分は以下のように計算できる．

$$-\frac{f(y)}{1-F(y)}+\frac{1}{y}=-\frac{1}{g(y)}+\frac{1}{y}$$

これをさらに微分すれば以下のようになる．

$$\frac{g'(y)}{[g(y)]^2}-\frac{1}{y^2}$$

これは $g'(y)<0$ であるので負である．従って，$\ln[(1-F(y))y]$ が凹関数であるので，売上金額の期待値は y についての対数凹関数である．

解答例 293

$f(x,a)=(x-a)^2$, ただし x の取りうる範囲は $-1\leqq x\leqq 2$. これは $a>1/2$ ならば $x(a)=-1$ であるが $a\leqq 1/2$ のときは $x(a)=2$ となるので不連続.

解説

図を描くとわかりやすいが，$f(x,a)$ は x に関して U のような形状をしている．なので，端点，$x=-1$ あるいは $x=2$ で最大値を取る．$f(-1,a)=(a+1)^2$ で $f(2,a)=(2-a)^2$ であるので，$(a+1)>2-a$ のときは -1 が最大化解であり，$a+1\leqq 2-a$ のときは 2 が最大化解となる．

一変数関数の積分

解答例 295

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{0}^{a} f(x)dx+\int_{-a}^{0} f(x)dx$$

である．右辺第二項については積分範囲が $-a<x<0$ であることから，$0<-x<a$ であるとも

考えられるので，

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-x)dx = \int_{0}^{a} -f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx$$

したがって，以下の等式が成り立つ．

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx - \int_{0}^{a} f(x)dx = 0$$

解説

1. $f(-x) = -f(x)$ となるような関数は奇関数と呼ばれる．
2. $\int_0^a f(x)dx$ が無限大になるときは，無限大同士の差になるので計算できない．

解答例 297

1. 置換積分すれば

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} u(\sigma y + m)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2}dy$$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2}dy$ は期待値 0, 分散 1 の正規分布の期待値であることから，$\int_{-\infty}^{\infty} y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2}dy = 0$ である．
3. $U = \int_{-\infty}^{\infty} u(\sigma y + m)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2}dx$ を σ で微分すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} yu'(\sigma y + m)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2}dy$$

4. u が凹関数であるので，$u'' < 0$ である．また，

$$g(y) = u'(\sigma y + m)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2}$$

とおき，$h(y) = \frac{g(y)}{\int_{-\infty}^{\infty} g(y')dy'}$ とおけば $\int_{-\infty}^{\infty} h(y)dy = 1$ であることから h は確率密度関数である．これに対応する分布関数を H とする．
また，以下の等式が成立することに注目する．

$$h(y) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2} = \left(\frac{u'(\sigma y + m)}{\int_{-\infty}^{\infty} g(y')dy'} - 1\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2}$$

$\int_{-\infty}^{\infty} g(y')dy' = \int_{-\infty}^{\infty} u'(\sigma y' + m)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y'^2}dy'$ であることから $\int_{-\infty}^{\infty} g(y')dy'$ は $u'(\sigma y + m)$ の期待値である．したがって $\int_{-\infty}^{\infty} g(y')dy'$ の値は $u'(\sigma y + m)$ の最小値よりも大きく，$u'(\sigma y + m)$ の最大値よりも小さい．
また $u'' < 0$ であることから $u'(\sigma y + m)$ は y について減少的である．したがって，$y < \bar{y}$ であれば $u'(\sigma y + m) > \int_{-\infty}^{\infty} g(y')dy'$ であり，また $y > \bar{y}$ であれば $u'(\sigma y + m) < \int_{-\infty}^{\infty} g(y')dy'$ となるような $\bar{y}$ を見つけられる．

よって $y < \bar{y}$ であれば $h(y) > \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2}$ であり，また $y > \bar{y}$ であれば $h(y) < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2}$ であることが言える．これより，問題 197 を用いれば Φ が H を一次確率支配することがわかる．

5. $h(y)$ の定義より，$A = \int_{-\infty}^{\infty} g(y')dy'$ とおくと

$$
\begin{aligned}
A \int_{-\infty}^{\infty} yh(y)dy &= \int_{-\infty}^{\infty} yu'(\sigma y + m) \frac{A}{A} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2} dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} yu'(\sigma y + m) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2} dy
\end{aligned}
$$

6. Φ が H を一次確率支配することから問題 195 より

$$
0 = \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2} dy < \int_{-\infty}^{\infty} u'(\sigma y + m) h(y) dy
$$

であることがわかる．また，$u'(x) > 0$ より $\int_{-\infty}^{\infty} g(y')dy' > 0$ であることから $\int_{-\infty}^{\infty} u(\sigma y + m) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2} dy < 0$ が言える．

解答例 303

1. 一階条件は

$$
\frac{\partial u(x(a), t)}{\partial x} x'(a) - m'(a) = 0
$$

2. 一階条件より

$$
m'(a) = \frac{\partial u(x(a), t)}{\partial x} x'(a)
$$

$a = t$ が最大化解であるので

$$
m'(t) = \frac{\partial u(x(t), t)}{\partial x} x'(t) \tag{17.1}
$$

が成立する．

(17.1) の両辺を t で積分すれば

$$
\begin{aligned}
& \int_0^t m'(y)dy = \int_0^t \left[\frac{\partial u(x(y),y)}{\partial x}x'(y)\right]dy \\
\Rightarrow \quad & m(t) - m(0) = \int_0^t \left[\underbrace{\frac{\partial u(x(y),y)}{\partial x}x'(y) + \frac{\partial u(x(y),y)}{\partial y}}_{u(x(y),y)\text{ を } y \text{ で微分したもの}} - \frac{\partial u(x(y),y)}{\partial y}\right]dy \\
\Rightarrow \quad & m(t) - m(0) = \int_0^t \left[\underbrace{\frac{\partial u(x(y),y)}{\partial x}x'(y) + \frac{\partial u(x(y),y)}{\partial y}}_{u(x(y),y)\text{ を } y \text{ で微分したもの}}\right]dy - \int_0^t \frac{\partial u(x(y),y)}{\partial y}dy \\
\Rightarrow \quad & m(t) - m(0) = u(x(t),t) - u(x(0),0) - \int_0^t \frac{\partial u(x(y),y)}{\partial y}dy \\
\Rightarrow \quad & m(t) = u(x(t),t) - \int_0^t \frac{\partial u(x(y),y)}{\partial y}dy
\end{aligned}
$$

解説

- これはメカニズムデザインという分野にある収入同値定理と呼ばれる結果の特殊ケースである．具体的な設定は次のとおりである．t はある消費者が持っている情報であるとする．例えば財に対する好みとか，その財に対してどれだけ評価しているかの金額のようなものである．企業はこの情報がわからないので消費者から情報 t を聞き出して，$x(t)$ だけの消費財を与えたいと考えている．その代わりに料金として消費者が $m(t)$ だけを企業に支払う．ただし，消費者は嘘（この場合，t でなくて a）を言うこともできる．したがって，消費者が嘘 a をいうとき，財が $x(a)$ だけ与えられ，その代金として $m(a)$ だけ徴収される．情報 t をもっているとき，$x(a)$ だけの財が与えられるときの効用が $u(x(a),t)$ で，代金として $-m(a)$ が引かれている．
- 1 で聞いているのは，もし正直に $a = t$ と自分の情報を報告することがこの消費者の効用を最大にするのであれば，どのような条件が満たされていなければならないかということである．
- 2 で聞いているのは，もし正直に情報を伝えることがこの消費者にとってベストならば代金の関数 $m(t)$ はどのような形をしているのかと言うことである．結果として，それは u と x と言う関数だけで決まってしまう．$m(t)$ と言うのは企業にとっての収入であるので，u と x が同じであれば収入の期待値が同じであることを意味している．
- メカニズムデザインという分野については，例えば 坂井 豊貴, 藤中 裕二, 若山 琢磨 (2008)「メカニズムデザイン: 資源配分制度の設計とインセンティブ」ミネルヴァ書房．を参照のこと．

解答例 304

1. $u(x,t) = xt$ であるので

$$u(x(t),t) - \int_0^t \frac{\partial u(x(y),y)}{\partial y} dy = x(t)t - \int_0^t x(y)dy$$

今，$X(t) = \int_0^t x(y)dy$ とおく．$X'(t) = x(t)$ かつ $X(0) = 0$ であることに注意する．このとき，

$$\int_0^a f(t)m(t)dt = \int_0^a dt f(t)[x(t)t - X(t)] = \int_0^a dt f(t)x(t)t - \int_0^a dt f(t)X(t)$$

部分積分によって $[(1-F(t))X(t)]_0^a = -\int_0^a dt f(t)X(t) + \int_0^a dt(1-F(t))x(t)$ である．したがって，

$$\int_0^a dt f(t)X(t) = -[(1-F(t))X(t)]_0^a + \int_0^a dt(1-F(t))x(t)$$

である．$F(a) = 1$，$X(0) = 0$ であることから $\int_0^a dt f(t)X(t) = \int_0^a dt(1-F(t))x(t)$ が言える．よって，

$$\begin{aligned}\int_0^a f(t)m(t)dt &= \int_0^a dt f(t)x(t)t - \int_0^a dt(1-F(t))x(t)\\ &= \int_0^a dt[f(t)x(t)t - (1-F(t))x(t)]\\ &= \int_0^a dt f(t)x(t)\left[t - \frac{1-F(t)}{f(t)}\right]\end{aligned}$$

となる．

2. $t > \frac{1-F(t)}{f(t)}$ であれば積分の中身は正，そうでなければ負であることから $t > \frac{1-F(t)}{f(t)}$ ならば $x(t) = 1$，$t \leqq \frac{1-F(t)}{f(t)}$ ならば $x(t) = 0$ とすれば $\int_0^a f(t)m(t)dt$ は最大になる．

解説

- $t - \frac{1-F(t)}{f(t)}$ は実質評価値 (virtual valuation) と呼ばれており，オークション制度の設計などにおいて期待売上金額を最大にするときに用いられるものである．

解答例 305

1. 分割を $s_0 = 0, s_1, \ldots, s_n = 1$（ただし $s_0 < s_1 < \cdots < s_n$）とする．すべての区間 $[s_i, s_{i+1}]$ について，問題 268 より有理数 $a \in [s_i, s_{i+1}]$ が存在する．したがって，$\max_{x \in [s_i, s_{i+1}]} f(x) = 1$ であることから，上ダルブー和は

$$\sum_{i=0}^{n-1} 1 \times (s_{i+1} - s_i) = 1$$

2. 分割を $s_0 = 0, s_1, \ldots, s_n = 1$（ただし $s_0 < s_1 < \cdots < s_n$）とする．すべての区間 $[s_i, s_{i+1}]$ について，問題 269 より無理数 $a \in [s_i, s_{i+1}]$ が存在する．したがって，$\min_{x \in [s_i, s_{i+1}]} f(x) = 0$ であることから，下ダルブー和は

$$\sum_{i=0}^{n-1} 0 \times (s_{i+1} - s_i) = 0$$

解説

1. この結果より，上ダルブー和と下ダルブー和は分割をいくら細かくしてもその差が収束することはない．したがって，このような関数はリーマン積分が不可能である．
2. このような関数を積分するにはルベーグ積分と呼ばれるものが一般に使われる．詳しくは測度論と呼ばれる分野の教科書を参照すること．例えば，原啓介 (2023)『測度の考え方—測り測られることの数学』技術評論社など．

線形代数

多変数関数の微分

解答例 313

- 次の条件を満たす関数は一次同次関数だけである．

$$\frac{\partial f(L,K)}{\partial L} L + \frac{\partial f(L,K)}{\partial K} K = f(L,K)$$

- このことを証明する．まず $g(t) = f(tL, tK)$ とおいてみよう．$g(t) = f(tL, tK)$ を t で微分すると

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\partial f(tL,tK)}{\partial \boxed{L}} \boxed{L} + \frac{\partial f(tL,tK)}{\partial K} \boxed{K} \\ &= \frac{1}{t} \frac{\partial f(tL,tK)}{\partial \boxed{L}} \boxed{t} L + \frac{\partial f(tL,tK)}{\partial K} \boxed{t} K = \frac{1}{t} f(tK, tL) = \frac{1}{t} g(t) \end{aligned}$$

である．そうすると

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = \boxed{\frac{1}{t}}$$

を得る．両辺を t に関して 1 から k まで積分すると

$$\ln \frac{g(k)}{\boxed{g(1)}} = \boxed{\ln k}$$

を得る．すなわち，

$$\frac{g(k)}{\boxed{g(1)}} = \boxed{k}$$

である．よって $g(k) = kg(1)$ となるので g を f に直せば一次同次の定義を得る．

解説

- $(\ln(g(x)))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$ および $(\ln(x))' = 1/x$ であることに注意する．
- 省略した途中式は以下の通りである．

$$\begin{aligned}\int_1^k \frac{g'(x)}{g(x)}dx &= \int_1^k (\ln(g(x)))'dx \\ &= \ln(g(k)) - \ln(g(1)) && \text{(微分積分学の基本定理より)} \\ &= \ln\frac{g(k)}{g(1)} && \text{(対数法則より)}\end{aligned}$$

- この結果は「同次関数についてのオイラーの定理」の逆として知られる．

制約付き最適化問題

解答例 317

1. この問題の最大化解は $x = y = 0$ である．実際，$y - x^2 \geqq 0$ より，$y \geqq 0$ であり，また，$0 \geqq y$ であるから $y = 0$ である．また，$0 = y \geqq x^2$ より $x = 0$ となる．
2. フリッツ・ジョン条件は

$$\begin{aligned}-\lambda_0 + \lambda_1 2x = 0 \\ -\lambda_0 + \lambda_1 x^2 - \lambda_2 = 0\end{aligned}$$

となる．もし，$\lambda_0 > 0$ であれば

$$\begin{aligned}-1 + \lambda_1 2x = 0 \\ -1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0\end{aligned}$$

とできる．しかしこのとき，$x = 0$ より，上の式が $-1 = 0$ となるので矛盾する．

解答例 318

制約条件から $x^2 \geqq 0$ であるので，制約条件が実際には $x \geqq 1$ であることがわかる．したがって，$f(x) = -8(x-1)^2(x-1/2)$ である．この関数を微分すると

$$-16(x-1)(x-1/2) - 8(x-1)^2 = -8(x-1)(2x-1+x-1) = -8(x-1)(3x-2) < 0$$

である．したがって，$x = 1$ が最大化解である．

動学システムと最適化

解答例 320

(1) 1

(2) $qR > c$ であるので，ボタンを押すことの期待効用は $qR - c > 0$ である．したがって，以降はボタンを押し続けることが最適である．

(3) 割引現在価値の総和は

$$V = \lim_{T\to\infty}\sum_{i=0}^{T}\delta^i(qR-c) = (qR-c) + \delta(qR-c) + \delta^2(qR-c) + \cdots$$

となるので，

$$V = \frac{1}{1-\delta}(qR-c)$$

(4)

$$p_t = \frac{p_{t-1}(1-q)}{p_{t-1}(1-q) + (1-p_{t-1})}$$

(5)

$$W(p) = -c + p\cdot q\cdot \boxed{V} + \delta[p\cdot(1-q) + (1-p)]\cdot W\left(\boxed{\frac{p(1-q)}{p(1-q)+(1-p)}}\right)$$

(6) $0 \geqq W(p)$

(7) $W(p)$ は (5) で与えられているので $0 \geqq W(p)$ という条件を変形する．

$$0 \geqq -c + p\cdot q\cdot V + [p\cdot(1-q) + (1-p)]\cdot\delta\cdot W\left(\frac{p(1-q)}{p(1-q)+(1-p)}\right)$$

$\dfrac{p(1-q)}{p(1-q)+(1-p)} < p$ なので，$W\left(\dfrac{p(1-q)}{p(1-q)+(1-p)}\right) = 0$ である．したがって，これを代入して上の不等式を変形すれば

$$\frac{c}{qV} \geqq p$$

となるのでボタンを押さないことが最適になるような p の最大値は $\frac{c}{qV}$.

(8) $t \geqq T$ 以降はボタンを押さないので $W(p_t) = 0$ である．それ以前は

$$\begin{aligned}
W(p_{T-1}) &= -c + pqV + [p\cdot(1-q) + (1-p)]\delta W(p_T) = -c + p\cdot q\cdot V\\
W(p_{T-2}) &= -c + pqV + [p\cdot(1-q) + (1-p)]\delta W(p_{T-1})\\
&\vdots\\
W(p_t) &= -c + pqV + [p\cdot(1-q) + (1-p)]\delta W(p_{t+1})
\end{aligned}$$

と計算していく．よって

$$W(p_t) = \frac{X(1-\alpha^{T-t})}{1-\alpha}$$

ただし $X = -c + p \cdot q \cdot V, \alpha = [p \cdot (1-q) + (1-p)]\delta$

第二刷時追加分

解答例 321

$a > b$ かつ $b > c$ とする．このとき，定義から $a - b$ と $b - c$ がそれぞれ正の数であることがわかる．すると正の数同士を足しても正の数であることから

$$a - b + b - c = a - c$$

が正の数であることがわかる．よって $a - c$ が正の数であるので $a > c$ が成立する．

解答例 323

考え 2 から赤い球を引く事象を R, 青い球を引く事象を B，全体事象を Ω としたとき，$R \cap B = \emptyset$ かつ $\Omega = R \cup B$ である．したがって，コルモゴロフの公理が満たされていれば $P(B) + P(R) = P(B \cup R) = P(\Omega) = 1$ となるはずである．しかし，考え 3 と 5 から，壺 B から赤い球を引く確率は 65% 以上で，考え 4 と 5 から壺 B から青い球を引く確率は 53% 以上であるということになる．したがって $P(B) \geqq 0.53$ かつ $P(R) \geqq 0.65$ となるので，$P(B) + P(R) \geqq 1.18$ となり，矛盾が起きる．

解説

これはエルスバーグのパラドックスと呼ばれるものの変種である．詳しくは意思決定理論の分野の書籍（例えばギルボア「不確実性下の意思決定理論」勁草書房，あるいは林「意思決定理論（数理経済学叢書）」知泉書院）を参照してください．

解答例 324

1. x の値がわかっているとする．このとき，y は一様分布に従うので，y が x 以下である確率は $P(y \leqq x) = \int_0^x dy = x$ である．
2. X が選ばれる確率を計算する. 候補者 X の能力が x であるとき，X が選ばれる確率は x である．したがって，これを x について期待値を取ると

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x dx + \frac{1}{2}0 = 1/4$$

である．
3. 2 より候補者 X が選ばれる確率は $1/4$ であるので，候補者 Y が選ばれる確率は $3/4$ である．

よって候補者 X が選ばれる確率は候補者 Y が選ばれる確率より低い．

4. 候補者 X の能力が x であるとき，X が選ばれる確率は x である．したがって，X が選ばれるという条件のもとで，x の期待値を計算すると

$$E(x \mid X) = \frac{\frac{1}{2}\int_0^1 x \cdot x dx}{1/4} = \frac{1/6}{1/4} = 2/3$$

1/4 で割るのは X が選ばれるという条件付きになっているからである．
候補者 X の能力が y であるとき，Y が選ばれる確率は $1/2 + y$ である．なぜなら，確率 1/2 で x の値が 0 であるからである．したがって，Y が選ばれるという条件のもとで，y の期待値を計算すると

$$E(y \mid Y) = \frac{\frac{1}{2}\int_0^1 y dy + \frac{1}{2}\int_0^1 y \cdot y dy}{3/4} = \frac{1/4 + 1/6}{3/4} = 5/9$$

5. 4 より $E(y \mid Y) = 5/9 < 2/3 = E(x \mid X)$.

解説

この例は Thomas Noe, 2020, “Comparing the Chosen: Selection Bias When Selection Is Competitive”, *Journal of Political Economy*, による．能力の低い傾向のある候補の方がいざ選ばれたときにはそうでない候補よりも能力が高い傾向にあることを示している．

解答例 325

u は凹関数であるので，$u'(\bar{x})(x - \bar{x}) \geqq u(x) - u(\bar{x})$ が成り立つ．したがって，

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x) f(x) dx &\leqq \int_a^b [u'(\bar{x})(x - \bar{x}) + u(\bar{x})] f(x) dx \\ &= \int_a^b u'(\bar{x})(x - \bar{x}) f(x) dx + u(\bar{x}) && (\textstyle\int_a^b f(x)dx = 1 \text{ より}) \\ &= u(\bar{x}) && (\bar{x} = \textstyle\int_a^b x f(x) dx \text{ より}) \end{aligned}$$

解説

この不等式はジェンセン（イェンセン）の不等式と呼ばれる．

解答例 327

$$K(f, f) = \int f(x) \ln\left(\frac{f(x)}{f(x)}\right) dx = \int f(x) \ln(1) dx = 0$$

である．また，$\ln(x)$ は凹関数であるからイェンセンの不等式から

$$K(f,g) = -\int f(x)\ln\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)dx \geqq -\int \ln\left(f(x)\frac{g(x)}{f(x)}\right)dx = -\int \ln(1)dx = 0$$

解説

この不等式はギブスの不等式と呼ばれる．また，$K(f,g)$ をカルバック・ライブラー情報量と呼ぶ．

追加問題

第 III 部

その他補足

第 1 章

論理と集合の補足

1.1 記号の由来

- ∀: 「すべての」は英語で for all. All の A を上下反転させて ∀.[*1]
- ∃: 「存在する」は英語で exists. Exists の E を左右反転させて ∃.[*2]
- ℝ: 実数全ての集合である ℝ は Real number （実数）の頭文字．単に **R** と太字で書くこともある．しかし黒板など手書きでは太字かどうかわからないので二重線を引いた ℝ を使う．これは黒板太字ともいう．$\mathfrak{R}$ というドイツ文字を使うこともあるがこれも手書きでは難しい.
- ℚ: 有理数は英語で rational number （比になる数）であるが，R は既に使ってしまった．なので Quotient （商）の頭文字を使う.
- ℤ: 整数は英語で integer だが，虚数の集合で 𝕀 を使うので他の文字を使った．Z はドイツ語の Zahlen（数）に由来する.
- ℕ: 自然数は英語で natural number であるので頭文字から.

その他数学記号の由来については次のコラムが詳しい（全部で 11 まであるが，ここでは 3 までと 11 を紹介する）.

- 中村亮一 (2019) 「数学記号の由来について (1)」 `https://www.nli-research.co.jp/report/detail/id=62419?site=nli` ニッセイ基礎研究所レポート 研究員の眼
- 中村亮一 (2019) 「数学記号の由来について (2)」 `https://www.nli-research.co.jp/report/detail/id=62678?site=nli` ニッセイ基礎研究所レポート 研究員の眼
- 中村亮一 (2020) 「数学記号の由来について (3)」 `https://www.nli-research.co.jp/report/detail/id=63317?site=nli` ニッセイ基礎研究所レポート 研究員の眼
- 中村亮一 (2022) 「数学記号の由来について (11)」 `https://www.nli-research.co.jp/report/detail/id=70664?site=nli` ニッセイ基礎研究所レポート 研究員の眼

また数学記号を誰が最初に使い始めたかなどのエピソードは 片野善一郎 (2005) 『素顔の数学者たち

[*1] タイプライターの時代は紙をひっくり返して打っていたらしい.

[*2] 上下反転だと同じなので左右反転

―数学史に隠れた 152 のエピソード』裳華房 が詳しいです．

第 2 章

二次関数の補足

2.1 具体例で学ぶ平方完成

a とか b とか c とか使われても平方完成がわからないという人のために，具体例を使って平方完成の感覚を掴んでいきましょう．

2.1.1 具体例 1

1. x^2+2x+3 を平方完成します．
2. まず，$(x+\square)^2$ を展開して，x^2+2x+ ナントカ になるような□を探します．
3. 展開すると，これも公式ですが，公式を使わずに分配法則で愚直にやると，

$$\begin{aligned}(x+\square)^2 &= (x+\square)(x+\square)\\ &= (x+\square)x+(x+\square)\square\\ &= x^2+\square x+\square x+\square^2\\ &= x^2+2\square x+\square^2\end{aligned}$$

   となります．
4. x^2+2x+ ナントカ になるためには $\square=1$ ではないといけません．
5. では $\square=1$ なので $(x+1)^2$ を用意してやりましょう．これを展開すれば x^2+2x+1 でした．
6. これと考えたい式 x^2+2x+3 をじっと見て，比べてみます．
7. おやおやと，$x^2+2x+3=x^2+2x+1+2$ だな，と考えることができます．$3=1+2$ ですので，足りない 1 を異なる部分の 3 から探してきてやります．
8. ここまでくれば一安心．

$$\begin{aligned}x^2+2x+3 &= x^2+2x+1+2\\ &= (x^2+2x+1)+2\\ &= (x+1)^2+2\end{aligned}$$

   としたらこれが平方完成です．

2.1.2　具体例 2

1. $3x^2+6x+5$ を平方完成します．
2. 今度はちょっと難しい．x^2 の係数に 3 がついています．
3. めんどうなので 3 でくくります．ただし x とか x^2 のついている項だけです．
4. 3 でくくると $3x^2+6x+5=3(x^2+2x)+5$ となりました．
5. ではくくった中身，x^2+2x を見てやります．前回と同様に $(x+\square)^2$ を展開して，x^2+2x+ナントカになるような□を探します．
6. $\square=1$ ですので，$(x+1)^2$ を考えます．
7. x^2+2x を考えたいのですが，$(x+1)^2=x^2+2x+1$ なので 1 が足りません．どうしましょうか．
8. 1 を勝手に借りてきて，でも勝手に増やしてはいけないのでその分後で 1 を返します．
9. つまりは $x^2+2x=x^2+2x+1-1$ という変形をやります．$+1$ は勝手に借りてきた部分，-1 は後で返した分です．そうして差し引きゼロであれば = で二つの式を結べるのです．
10. さて続きです．
$$\begin{aligned}x^2+2x&=x^2+2x+1-1\\&=(x+1)^2-1\end{aligned}$$
となりました．この $(x+\square)^2$ の形が出てきて，他の場所の x を消し去れば勝ち条件です．
11. $(x+1)^2-1$ をさっきでてきた x^2+2x のところに放り込んでやります．
12. 復習すると
$$\begin{aligned}3x^2+6x+5&=3(x^2+2x)+5 &&(x^2+2x=(x+1)^2-1\text{ を放り込むと})\\&=3((x+1)^2-1)+5\end{aligned}$$
となります．
13. 後は分配法則を使って計算します．
$$\begin{aligned}3((x+1)^2-1)+5&=3(x+1)^2-3+5\\&=3(x+1)^2+2\end{aligned}$$
これで平方完成の完了です．

2.1.3　具体例 3

1. $3x^2+9x+7$ を平方完成します．
2. 要領は前回と全く同じです．
3. 3 で x と x^2 がついている項をくくり出します．
4. こんなかんじですね．
$$3(x^2+3x)+7$$

5. でも待ってください．$(x+\square)^2$ を展開して x^2+3x が出てくる場合なんて知りません．でもこれはそれほど大したことはありません．
6. 展開を思い出してください．こうでした．

$$(x+\square)^2 = x^2 + 2\cdot\square\cdot x + \square^2$$

7. そうです．$2\cdot\square = 3$ になればいいのです．そうすれば x^2+3x がでてくるようになります．
8. $\square = \dfrac{3}{2}$ ですね．
9. そうすると，

$$(x+\square)^2 = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2$$

となりますのでこれを計算します．

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 = x^2+3x+\frac{9}{4}$$

になりました．

10. x^2+3x とくらべると，$\dfrac{9}{4}$ が足りません．なので $\dfrac{9}{4}$ を借りてきて，後で返します．

$$x^2+3x = x^2+3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}$$

です．

11. 右辺の第 1 〜3 項まではまさしく $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2$ でした．なので

$$\begin{aligned}x^2+3x &= x^2+3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\\ &= \left(x^2+3x = x^2+3x+\frac{9}{4}\right)-\frac{9}{4}\\ &= \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\end{aligned}$$

となります．

12. では求めたかった式に戻りましょう．$3x^2+9x+7 = 3(x^2+3x)+7$ まで変形していたのでした．これにさっき求めた式を放り込んでやると...

$$\begin{aligned}3x^2+9x+7 &= 3(x^2+3x)+7\\ &= 3\left(\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right)+7\end{aligned}$$

となります．あとは展開してやるだけです．計算すると

$$\begin{aligned}
3x^2+9x+7 &= 3(x^2+3x)+7 \\
&= 3\left(\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right)+7 \\
&= 3\left(\left(x+\frac{3}{2}\right)^2\right)-3\cdot\frac{9}{4}+7 \\
&= 3\left(\left(x+\frac{3}{2}\right)^2\right)-\frac{27}{4}+7 \\
&= 3\left(\left(x+\frac{3}{2}\right)^2\right)-\frac{27}{4}+\frac{28}{4} \\
&= 3\left(\left(x+\frac{3}{2}\right)^2\right)+\frac{28-27}{4} \\
&= 3\left(\left(x+\frac{3}{2}\right)^2\right)+\frac{1}{4} \\
&= 3\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4} \quad \text{最後に余計なカッコをとる}
\end{aligned}$$

となりました．これで平方完成完了です．

2.1.4 具体例 4

1. $3x^2+7x+11$ を考えてみましょう．
2. くくるところで問題発生，7 は 3 の倍数ではありません．
3. いやいや問題なしです．分数を使ってやれば $7=3\cdot\dfrac{7}{3}$ なので 3 をくくり出せます．
4. というわけでくくり出します．

$$3x^2+7x+11=3\left(x^2+\frac{7}{3}x\right)+11$$

5. 今度は $(x+\square)^2$ を展開して，$x^2+\dfrac{7}{3}x$ となる□を探してやりゃあなりません．
6. 毎度お馴染みの展開をすると

$$(x+\square)^2=x^2+2\cdot\square\cdot x+\square^2$$

ですので

$$2\cdot\square=\frac{7}{3}$$

となる□を探せば十分です．

7. 上の式の両辺を 2 で割って $\square=\dfrac{7}{6}$ ですね．

8. というわけで $\left(x+\dfrac{7}{6}\right)^2$ を展開すれば

$$\left(x+\frac{7}{6}\right)^2 = x^2+\frac{7}{3}x+\frac{49}{36}$$

となります．

9. 毎度お馴染みの貸し借りをしてやれば

$$x^2+\frac{7}{3}x = x^2+\frac{7}{3}x+\frac{49}{36}-\frac{49}{36}$$

ですので

$$\begin{aligned} x^2+\frac{7}{3}x &= x^2+\frac{7}{3}x+\frac{49}{36}-\frac{49}{36} \\ &= \left(x+\frac{7}{6}\right)^2-\frac{49}{36} \end{aligned}$$

となります．

10. さて求めたい式に戻りましょう．

$$3x^2+7x+11 = 3\left(x^2+\frac{7}{3}x\right)+11$$

でしたので

$$\begin{aligned} 3x^2+7x+11 &= 3\left(x^2+\frac{7}{3}x\right)+11 \\ &= 3\left(\left(x+\frac{7}{6}\right)^2-\frac{49}{36}\right)+11 \\ &= 3\left(\left(x+\frac{7}{6}\right)^2\right)-3\cdot\frac{49}{36}+11 \\ &= 3\left(\left(x+\frac{7}{6}\right)^2\right)-\frac{49}{12}+11 \\ &= 3\left(\left(x+\frac{7}{6}\right)^2\right)-\frac{49\cdot 11}{132}+\frac{12}{132} \\ &= 3\left(\left(x+\frac{7}{6}\right)^2\right)+\frac{12-49\cdot 11}{132} \\ &= 3\left(\left(x+\frac{7}{6}\right)^2\right)-\frac{527}{132} \\ &= 3\left(x+\frac{7}{6}\right)^2-\frac{527}{132} \end{aligned}$$

となります．（ややこしい計算は電卓を使ってもいいです）これで平方完成の完了です．

2.1.5 具体例 5

1. $-3x^2+7x+11$ を考えてみましょう．
2. さっきと全く同じようにくくってやれますが，マイナスに注意!
$$-3x^2+7x+11=-3\left(x^2-\frac{7}{3}x\right)+11$$
となります．
3. 今度は $(x+\square)^2$ を展開して，$x^2-\dfrac{7}{3}x$ となる□を探してやりましょう．
4. 毎度お馴染みの展開をすると
$$(x+\square)^2=x^2+2\cdot\square\cdot x+\square^2$$
ですので
$$2\cdot\square=-\frac{7}{3}$$
となる□を探せば十分です．
5. 上の式の両辺を 2 で割って $\square=-\dfrac{7}{6}$ ですね．
6. というわけで $\left(x-\dfrac{7}{6}\right)^2$ を展開すれば
$$\left(x-\frac{7}{6}\right)^2=x^2-\frac{7}{3}x+\frac{49}{36}$$
となります．
7. 毎度お馴染みの貸し借りをしてやれば，
$$x^2-\frac{7}{3}x=x^2+\frac{7}{3}x+\frac{49}{36}-\frac{49}{36}$$
ですので
$$\begin{aligned}x^2-\frac{7}{3}x&=x^2-\frac{7}{3}x+\frac{49}{36}-\frac{49}{36}\\&=\left(x-\frac{7}{6}\right)^2-\frac{49}{36}\end{aligned}$$
となります．
8. さて求めたい式に戻りましょう．
$$-3x^2+7x+11=-3\left(x^2-\frac{7}{3}x\right)+11$$

でしたので

$$
\begin{aligned}
-3x^2+7x+11 &= -3\left(x^2-\frac{7}{3}x\right)+11 \\
&= -3\left(\left(x-\frac{7}{6}\right)^2-\frac{49}{36}\right)+11 \\
&= -3\left(\left(x-\frac{7}{6}\right)^2\right)+3\cdot\frac{49}{36}+11 \\
&= -3\left(\left(x-\frac{7}{6}\right)^2\right)+\frac{49}{12}+11 \\
&= -3\left(\left(x-\frac{7}{6}\right)^2\right)+\frac{49\cdot 11}{132}+\frac{12}{132} \\
&= -3\left(\left(x-\frac{7}{6}\right)^2\right)+\frac{12+49\cdot 11}{132} \\
&= -3\left(\left(x-\frac{7}{6}\right)^2\right)+\frac{551}{132} \\
&= -3\left(x-\frac{7}{6}\right)^2+\frac{551}{132}
\end{aligned}
$$

となります．（ややこしい計算は電卓を使ってもいいです）これで平方完成の完了です．

第 3 章

数列と極限の補足

3.1　無限級数

数列の和，級数の範囲が無限になるとき，つまり $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ といったものを考えるときには注意が必要です．例えば $a_n = (-1)^n$ というものを考えます．すると，

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots$$

ということになります．これを以下のように考えてみましょう．

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} a_i &= [(-1) + 1] + [(-1) + 1] + [(-1) + 1] + \cdots \\ &= 0 + 0 + 0 + \cdots\end{aligned}$$

そうすると和は 0 に見えます．一方で，次のように考えてみるとどうでしょう．

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} a_i &= (-1) + [1 + (-1)] + [1 + (-1)] + \cdots \\ &= -1 + 0 + 0 + \cdots\end{aligned}$$

そうすると今度は和は -1 に見えます．したがって，$\sum$ の範囲が無限になるときにはそれが必ずしも定まらないという可能性があります．これが起きる理由は $\sum_{i=1}^{n} a_i$ という数列が収束しないことから来ています．もし n が偶数なら -1 と 1 が同じだけ現れるので $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$ ですが，n が奇数であれば -1 の方が一つ多いので $\sum_{i=1}^{n} a_i = -1$ です．このとき $\sum_{i=1}^{n} a_i$ は振動する数列です．

無限数列の和，これは無限級数と言いますが，これをきちんと定める一つの方法は $\sum_{i=1}^{n} a_i$ の極限として値を決めるという方法です．つまり $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} a_i$ の値がきちんと定まるのなら，その値を $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ の値として決めるということです．先ほどの数列の例だと $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} a_i$ の値がきちんと定まらないので，この定義で言えば $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ の値は定まらないということです．

このように無限を扱うときには非常に注意が必要となります．

3.2　$\sum$ の使い方の補足

総和の記号 $\sum$ は $\sum\limits_{i=1}^{n}$ という書き方以外にもさまざまな使い方をすることがあります．以下ではその例を見ていくことにしましょう．

■集合　集合 A について，

$$\sum_{a\in A} a$$

と書けば A の要素を全て足し合わせるという意味になります．$A = \{4, 9, 14\}$ とかですと $\sum\limits_{a\in A} a = 4 + 9 + 14$ ということです．

■二重添字　$\sum$ を二重に使うことも考えられます．例えば以下の式はどういったものを表しているのでしょうか．

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij$$

これは内から外へ $\sum$ を計算すると考えれば良いです．つまりまず，一番外側の $\sum$ で使っている i を固定して $\sum_{j=1}^{n} ij$ を考えれば以下のように計算できます．

$$\sum_{j=1}^{n} ij = i\sum_{j=1}^{n} j = i(1+2+\cdots+n)$$

i を $\sum\limits_{j=1}^{n}$ の外側に出せるのは i が j に関係しない数だからです．以下のように考えてみたらわかりやすいかもしれません．

$$\sum_{j=1}^{n} ij = i\times 1 + i\times 2 + \cdots + i\times n = i(1+2+\cdots+n) = i\sum_{j=1}^{n} j$$

そして，これをさらに i について足し合わせるので

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij &= \sum_{i=1}^{n} i(1+2+\cdots+n)\\ &= (1+2+\cdots+n)\sum_{i=1}^{n} i\\ &= (1+2+\cdots+n)(1+2+\cdots+n) = (1+2+\cdots+n)^2\end{aligned}$$

と計算できるわけです．

また，二重に $\sum$ を書く代わりに $\sum\limits_{i,j=1}^{n}$ とまとめて書いてしまうこともあります．つまり

$$\sum_{i,j=1}^{n} ij = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij$$

ということです．

二重だけでなく，３重，４重に $\sum$ を重ねることもあります．そうすると，i, j とかを使っていると文字が足りなくなるので以下のように書くと便利です．

$$\sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} i_1 \times i_2 \times \cdots \times i_k$$

i_j で一つの文字を表します．この場合は $\sum$ が k 個重なっています．

■条件をつける　足し合わせるものに条件をつけることがあります．例えば以下の式はどういうものを指しているでしょうか？

$$\sum_{i,j\in\{1,\ldots,n\}, i\neq j} ij$$

これは i と j が被らないように足し合わせるという意味になります．この場合 $i = j$ ならば $ij = i^2$ となるのでそれを除いたものということになります．したがって，

$$\sum_{i,j\in\{1,\ldots,n\}, i\neq j} ij = (1+\cdots+n)^2 - (1^2+2^2+\cdots+n^2)$$

と計算できるわけです．

3.3　多重総和記号の応用：ジニ係数

多重に $\sum$ 記号を使ったものの応用として，ジニ係数というものを考えてみましょう．これは所得の不平等さを表す指標として知られるものです．

所得を低い順から累積して並べた曲線のことを**ローレンツ曲線**と呼びます．具体例を使って考えてみましょう．今，社会の構成員が３人で彼らの所得が $I_1 < I_2 < I_3$ であったとします．このとき，図 3.1 中の青線がローレンツ曲線です． 図 3.1 の横軸は所得下位 $x\%$ の人口割合を指します．個人 1 は３人いるうちの最下位であるので人口の 33% を占めています．また，個人 1 と 2 は３人いるうちの下位二人であるので二人で 67% を占めています．こういった割合を横軸に記しています．縦軸は所得下位 $x\%$ の人が全所得に占めている所得の割合を指します．この場合の全所得合計は $I_1 + I_2 + I_3$ です．下位 33% である個人 1 が持つ所得が全所得に占めている割合は $\frac{I_1}{\sum_i I_i}$ です．また下位 67% である個人 1 と２が持つ所得の合計が全所得に占めている割合は $\frac{I_1+I_2}{\sum_i I_i}$ です．基本的にローレンツ曲線が 45 度線（図中の破線）に近いほど平等に近いということになります．実際全ての人が同じ所得を持っていればローレンツ曲線は 45 度線そのものになります．

ローレンツ曲線で不平等を比較するときはそれがどれだけ 45 度線に近いかで考えます．つまり図 3.2 の左図では 45 度線に近い青線で表現されるローレンツ曲線のほうが不平等度合いが低いということです．一方で図 3.2 の右図のようにローレンツ曲線同士が交差するときには不平等度合いを比較することができません．そこでローレンツ曲線の 45 度線への近さを数値で表現することを考えたいわけです．それが**ジニ係数**と呼ばれる指標です． ジニ係数は図 3.3 中の塗りつぶされた領域の面積（を二倍したも

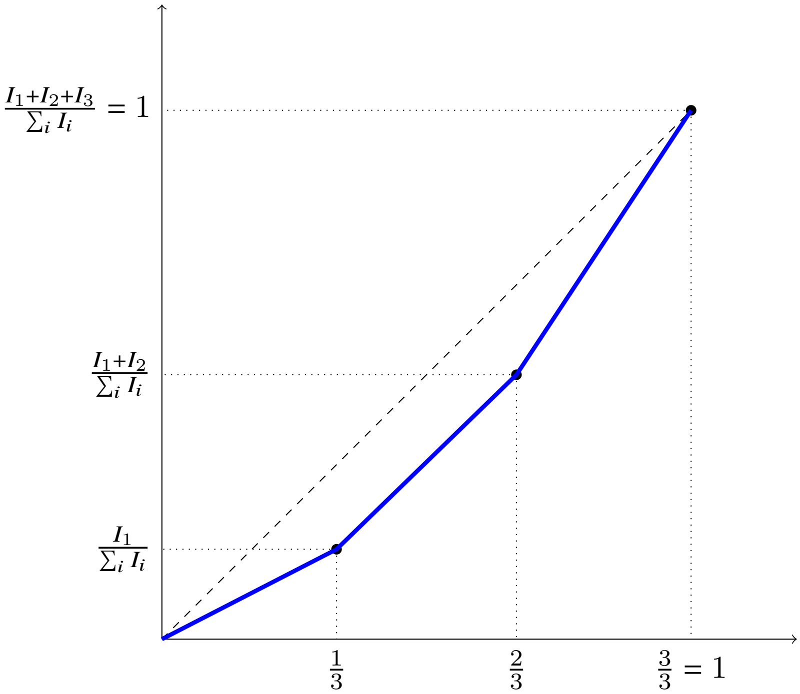


図 3.1　ローレンツ曲線

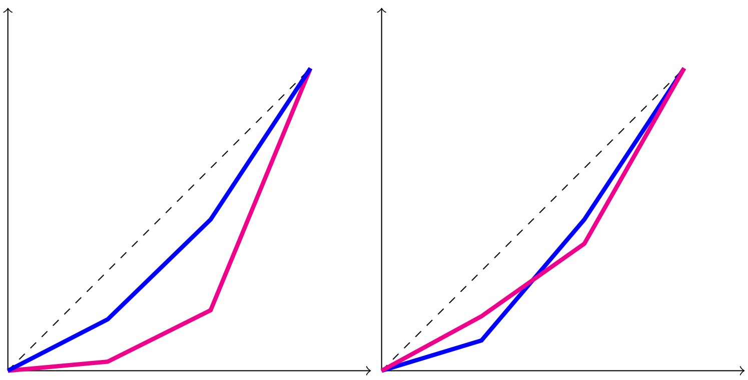


図 3.2　ローレンツ曲線の比較

の）です．ローレンツ曲線が 45 度線に近づくほどこの面積は小さくなるので不平等度合いが小さければ指数が下がるという性質を満たしてくれます．

ジニ係数は面積と考えると計算が面倒ですが，二重総和記号を使った以下の簡単な公式があります．

$$G = 1 - \frac{1}{N^2\mu}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\min\{I_i, I_j\}$$

ここで $\mu = \sum_{i=1}^{N}/N$ です（つまり平均所得となります）．これを $N = 3$ の場合をもとに簡単に解説しま

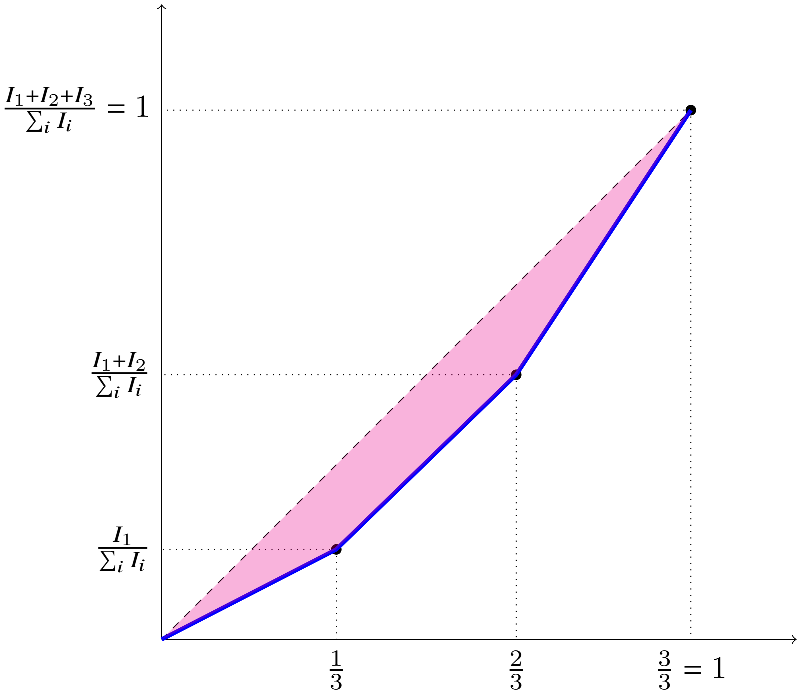


図 3.3　ジニ係数

しょう．まず $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\min\{I_i, I_j\}$ の部分は次の足し算として考えられます．

$$\begin{array}{cccccc} & I_1 & + & I_1 & + & I_1 \\ + & I_1 & + & I_2 & + & I_2 \\ + & I_1 & + & I_2 & + & I_3 \end{array} \tag{3.1}$$

この事実を簡単に解説します．まず $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\min\{I_i, I_j\}$ とは $\sum_{j=1}^{N}\min\{I_i, I_j\}$ を i を 1 から 3 まで動かしてすべて足せと言う式です．$i = 1$ だとしよう．$\min\{I_i, I_j\}$ は I_i と I_j のうち小さいものと言う意味です．$I_1 < I_2 < I_3$ であるので，$\min\{I_1, I_j\} = I_1$ です．これが (3.1) 式の 1 行目です．つづいて $i = 2$ の場合を考えます．これは $\sum_{j=1}^{N}\min\{I_2, I_j\} = I_1 + I_2 + I_2$ と計算することができます．これが (3.1) 式の 2 行目です．$i = 3$ の場合も同様に $\sum_{j=1}^{N}\min\{I_3, I_j\} = I_1 + I_2 + I_3$ と計算することができます．(3.1) 式の 3 行目です．したがってこれらをすべて足したものが $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\min\{I_i, I_j\}$ です．

さて，これらをもとに，ジニ係数を考えます．そのために考えるのは図 3.4 中の塗りつぶされた面積です．これを二倍して 1 から引くとジニ係数になります． この面積は図 3.4 中の３つのパーツに分解できます．これらの面積を計算して合計することになるがその前にまず $\sum_i I_i = \mu N$ であることに注意しましょう．最初は図 3.4 中の赤く囲まれた三角形 A の面積を計算します．これは

$$\triangle A = \frac{I_1}{\mu N} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{N} = \frac{I_1}{2N^2\mu}$$

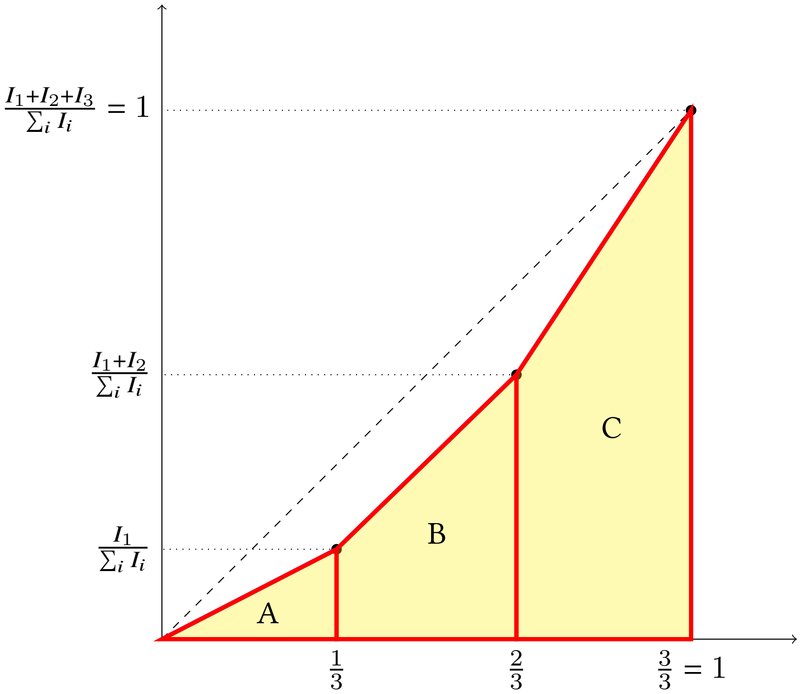


図 3.4　ジニ係数の計算

です．次に台形 B の面積を計算します．これは

$$\square B = \left(\frac{I_1}{\mu N} + \frac{I_1 + I_2}{\mu N}\right) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{N} = \frac{I_1 + (I_1 + I_2)}{2N^2\mu}$$

です．最後に台形 C の面積を計算します．

$$\square C = \left(\frac{I_1 + I_2}{\mu N} + \frac{I_1 + I_2 + I_3}{\mu N}\right) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{N} = \frac{(I_1 + I_2) + (I_1 + I_2 + I_3)}{2N^2\mu}$$

です．

最初の特徴として分母に $2N^2\mu$ があることがわかります．これはジニ係数の公式の分母にもあるのでその部分は OK です．２で割っているのは最後に全体を二倍するからです．次に分子を考えましょう．これについては (3.1) 式を次のように見てみましょう．

$$\begin{array}{cccccc} & I_1 & + & I_1 & + & I_1 \\ + & I_1 & + & I_2 & + & I_2 \\ + & I_1 & + & I_2 & + & I_3 \end{array}$$

つまり上の式の最初の四角く囲まれた部分が A の面積，次のカギ型の部分が B の面積，そして一番大きいカギ型の部分が C の面積を表現しているのです．これで公式が表す式がジニ係数の計算と一致していることがわかります．

第 4 章

その他高校数学の補足

この章では本書では扱わなかったが，比較的よく使われる高校数学の内容を復習します．

4.1 数学的帰納法

論理における「ならば」を使った有名な論法の一つに三段論法というものがあります．これは，「A ならば B」と「B ならば C」が両方とも真であれば，「A ならば C」が成立するというものです．古の例としては， A: この者はソクラテスである．B: この者は人間である．C: この者はいつか死ぬ．というもので，「A ならば B」は「ソクラテスであるなら人間である」，「B ならば C」は「人間であるならいつか死ぬ」という命題になり，その二つがいずれも正しいので新たな命題「A ならば C」，「ソクラテスは死ぬ」を導くことができます．

この事実を実際に真理表を使って確かめてみましょう．

A	B	C	$A \to B$	$B \to C$	$(A \to B) \land (B \to C)$	$A \to C$	$((A \to B) \land (B \to C)) \to (A \to C)$
T	T	T					
T	T	F					
T	F	T					
T	F	F					
F	T	T					
F	T	F					
F	F	T					
F	F	F					

上の表において，$((A \to B) \land (B \to C)) \to (A \to C)$ が三段論法を示しています．つまり「A ならば B」と「B ならば C」が両方とも真というのは $(A \to B) \land (B \to C)$ が真ということであり，そうであるならば $A \to C$ が真ということです．表を埋めていけば $((A \to B) \land (B \to C)) \to (A \to C)$ は常に真であることが確かめられます（これは練習問題です）．$p \to q$ が真であれば，p が真のときには q が必ず真であることに注意してください．p に $(A \to B) \land (B \to C)$ を代入し，q を $A \to C$ を代入すれば，$(A \to B) \land (B \to C)$ が真のときには $A \to C$ は必ず真ということになります．

この三段論法を発展させたものとして，数学的帰納法というものがあります．簡単にいうと次のようなものですまず，$P(n)$ を自然数 n についての述語であるとします．このとき，次の２点を確かめます．

(a) $P(1)$ が真であること．
(b) $P(k)$ が真であるときには $P(k+1)$ も真であること．

そうすれば，(a) より $P(1)$ が真です．また，(b) の k に 1 を代入すれば，(b) は $P(1)$ が真であるときに $P(1+1)=P(2)$ も真であるということを言っているので，$P(2)$ が真になります．また，今度は (b) に $k=2$ を代入すれば，(b) は $P(2)$ が真であるときに $P(2+1)=P(3)$ も真であるということを言っていますので $P(3)$ が真になります．これを繰り返していけばどんな自然数についても $P(n)$ が真ということになり，かなり一般的なことが言えるということになります．

このことを，あえて難しく論理式で書けば次のようなものになります．すると，数学的帰納法とは以下の命題のことを言います．

$$[P(1)\land(\forall k\in\mathbb{N}(P(k)\to P(k+1)))]\to\forall m\in\mathbb{N}(P(m))$$

これを具体例を使って説明しましょう．まず $P(n)$ は n についての述語なので，例えば，$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$ などというものです．$P(1)$ はこれが $n=1$ のときに真であるかどうかという問題です．例えば先ほどの $\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$ に $n=1$ を代入すれば $1=\frac{1(1+1)}{2}=1$ となるので確かに成立しています（代入して確かめましょう）．

次に $\forall k\in\mathbb{N}(P(k)\to P(k+1))$ というのは，どんな自然数 k を取ってきても，$P(k)$ が真ならば $P(k+1)$ も真であるというものです．$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$ の例で確かめてみます．いま，$P(k)$ が真のときを考えます（ならば文は前提が偽のときを考えないことに注意）．これによって，$n=k$ を先ほどの式に代入すれば $\sum_{i=1}^{k} i=\frac{k(k+1)}{2}$ が成り立っているという前提で考えてみます．そうすると，$\sum_{i=1}^{k+1} i=\sum_{i=1}^{k} i+k+1$ ですから，$\sum_{i=1}^{k} i$ に $\frac{k(k+1)}{2}$ を代入することができ，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} i&=\frac{k(k+1)}{2}+k+1\\&=\frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2}\\&=\frac{(k+2)(k+1)}{2}\end{aligned}$$

となり，これは $\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$ の式に $n=k+1$ を代入した結果となります．そうすると，$\forall k\in\mathbb{N}(P(k)\to P(k+1))$ は真であると考えられます．

そうすると，数学的帰納法の結論は $\sum_{i=1}^{m} i=\frac{m(m+1)}{2}$ がどんな自然数 m についても成立することを示しています．（そしてこれは $\sum_{i=1}^{m} i$ の計算公式の証明でもあります）．

この数学的帰納法は自然数 n についての命題を証明するときに非常に便利でよく使われます．これはなんとなく結論が経験的にわかっていれば（つまり，誰かがなんとなくの法則を見つけていれば）比較的楽に証明が行えるからという理由です．比較的楽かどうかはまあやってみなければわかりませんが，なんとなく，成り立ちそうだと思ったときには使える方法でしょう．

4.2　順列・組み合わせ・多項定理

$\sum$ は総和記号を表していました．つまり $\sum_{i=1}^{n} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ です．これのかけ算バージョンとして，$\prod$ というものがあります．これは $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$ と定義されるものです．かけ算の値，積のことを英語で product というのでその頭文字の p を使いたいところですが， p はあちこちで使うので，ギリシャ文字の p にあたる π の大文字である Π をその記号として使っています．

特に，$\prod_{i=1}^{n} i = n!$ と書きます．これは（n の）**階乗**と呼ばれます．n の階乗 $n!$ は n 個の異なるものを並び替えるパターンの総数であることが知られています．例えば ABCD を並び替えて作れられる文字列のパターンとしては ACBD や BADC などがありますが，そのパターンの総数は，文字が 4 つあるので $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ というわけです．

この理由は次のとおりです．まず最初の文字のパターンは，n 個の文字の候補があるので n 個です．次に 2 番目の文字のパターンは，最初に文字を一つ使ったので，$n-1$ 個のパターンがあります．同じように 3 番目の文字のパターンは $n-2$ 個です．これを n 番目まで続けていけば，それぞれのケースでの i 番目の文字の候補は $n-i+1$ パターンということになります．

ABCD の文字列を並び替える話で考えてみましょう．最初の一文字目は A，B，C，D それぞれ 4 パターンあります．そして A が最初のケースだと，次の二文字目は B，C，D の 3 パターンです．同じように B，C，D がそれぞれ一文字目のケースのときも 3 パターンづつあるということなので，二文字目までのパターンは 4×3 ということになります．これを 1 まで繰り返していけば $4 \times 3 \times 2 \times 1$ とパターン数が求まることになります．

同じような発想で，n 個のものから k 個だけ，選んできて並べるパターンは $n \times (n-1) \times \ldots (n-k+1)$ 通りあります．1 番目を選ぶのが n 通り，2 番目を選ぶのが残りの $n-1$ 個から選ぶので $n-1$ 通り，と続けていき，k 番目を選ぶと，すでに $k-1$ 個選んでいるので残りは $n-(k-1) = n-k+1$ 通りで全てのパターンをかけ合わせたものが n 個のものから k 個だけ，選んできて並べるパターンの総数，$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)$ ということです．$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) \times (n-k)!$ ともいえるので $\frac{n!}{(n-k)!}$ と書いても良いでしょう．

次によく使うものが，n 個のものから k 個だけ，選んでくるパターンの総数です．さっきと似ていますが，並べる順番はどうでも良いということです．例えば ABCD から二個選ぶ例として，A と B を選ぶことを考えます．そうすると，さっきのやり方ではこれらを並べる AB と BA というものを両方数えていることになりますが，組み合わせとして考えれば AB でも BA でも同じです．ですので $\frac{n!}{(n-k)!}$ という計算の仕方では 2 倍余計に数えているということになります．

この組み合わせのパターンを計算するには，その順番のパターン数で割ることを考えます．n 個のものから k 個だけ選んできて並べると $\frac{n!}{(n-k)!}$ だけのパターンがありますが，これは同じ k 個の組み合わせを並び替えたパターンが含まれています．k 個のものを並べるパターンの数は $k!$ だけあるので，$\frac{n!}{(n-k)!}$ という数は同じ組み合わせを $k!$ 回数えているということになります．ですのでその同じものを数えている回数で割れば，組み合わせのパターンの数を計算することができます．したがって，$\frac{n!}{(n-k)!k!}$ がそのパターンの数ということになります．

同じような発想を使って，同じものを並べるパターン数を考えます．いま，$AAAABBBCCCCC$ という文字列を並び替えてできる文字列のパターン数は何通りあるでしょうか．これは 12 文字あるので 12! といきたいですが，そうではありません．この数え方では同じ A を区別しているということになります．もう少し具体的に説明すると，1 番目の A を A_1，2 番目の A を A_2 というように書くとすると，12! という数え方は $A_1A_2A_3A_4BBBCCCCC$ という文字列と，$A_2A_1A_3A_4BBBCCCCC$ という文字列を区別しているということになります．本来は 1 番目とか 2 番目というラベルはついていませんので，どちらも $AAAABBBCCCCC$ という同じ文字列なはずです．とすると A が 4 回登場することから，A の並び方の数だけ同じものを数えているということになります．B や C についても同じです．したがって，被っている回数だけ割ってやらなければいけません．A は 4 つ，B は 3 つ，C は 5 つ登場するので，それぞれ 4!，3!，5! だけ重複して同じものをカウントしているということです．ゆえに，$AAAABBBCCCCC$ という文字列を並び替えてできる文字列のパターン数は全体の 12! をそれぞれ同じ文字を並び替えるパターン数，4!，3!，5! で割ることになります．つまり，そのパターン数は $\frac{12!}{4!3!5!}$ ということになるわけです．

この応用例として有名なものが，多項式のべき乗の展開公式です．つまり

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^k$$

を展開する公式です．これをどのように考えるか説明しましょう．もう少しこの式を書き下せば次のようになりますね．

$$\underbrace{\overbrace{(a_1 + \cdots + a_n)}^{1\ \text{番目の塊}} \times \overbrace{(a_1 + \cdots + a_n)}^{2\ \text{番目の塊}} \times \cdots \times \overbrace{(a_1 + \cdots + a_n)}^{k\ \text{番目の塊}}}_{k\ \text{回}}$$

ここで，最初の項の a_1 に注目します．この項を展開していくと，分配法則から

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \times \overbrace{(a_1 + \cdots + a_n)}^{2\ \text{番目の塊}} \times \cdots \times \overbrace{(a_1 + \cdots + a_n)}^{k\ \text{番目の塊}}$$

というように 1 番目の塊をバラすことができます．同じように 2 番目の塊をバラすと

$$\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1} \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2} \times \overbrace{(a_1 + \cdots + a_n)}^{3\ \text{番目の塊}} \times \cdots \times \overbrace{(a_1 + \cdots + a_n)}^{k\ \text{番目の塊}}$$

と書くことができます．これを繰り返せば

$$\sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} a_{i_1} \times a_{i_2} \times \cdots \times a_{i_k}$$

と書くことができるでしょう．そうすると，a_1 から a_n までを合計 k 回かけたものの和として，$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^k$ を展開することができます．ところで，$i_1, i_2, \ldots, i_n$ というものはダブりがありえます．というのも $i_1, \ldots, i_n$ はそれぞれ，1 から n まで全てのパターンを数え上げているので，

$i_1 = \cdots = i_n = 1$ になったり，あるいは 2 が 3 回，5 が 4 回登場するみたいなこともあり得るわけです．そして，そういったパターンは全て同じものです．

例えば $k = 3$ で，$n = 2$ の場合を考えてみましょう．これは

$$\sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2}\sum_{i_3=1}^{2} a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}$$

となるわけです．そうすると全てのパターンを数え上げると以下のようになります．

$$\begin{gathered} a_1a_1a_1 + a_1a_1a_2 + a_1a_2a_1 + a_1a_2a_2 \\ +a_2a_1a_1 + a_2a_1a_2 + a_2a_2a_1 + a_2a_2a_2 \end{gathered}$$

みてわかるように，同じものがたくさんありますね．例えば $i_1 = i_2 = 1$ で $i_3 = 2$ であっても $i_1 = 2$ で $i_2 = i_3 = 1$ であっても出てくるものは $a_1a_1a_2$ と $a_2a_1a_1$ なので同じものなわけです．したがって，そのダブりをカウントし，その総数で割ることを考えなければなりません．

さて，いま a_i が m_i 個かけられている項を考えましょう．つまり $a_1^{m_1} \times a_2^{m_2} \times \cdots \times a_n^{m_n}$ という項です．ただしかける数は全体で k 回なので $\sum_{i=1}^{n} m_i = k$ です．そうするとそれが出てくるパターンは $m_i!$ 通りづつあるので，その総数は

$$\frac{k!}{m_1!m_2!\ldots m_n!}$$

だけあることになります．したがって，$a_1^{m_1} \times a_2^{m_2} \times \cdots \times a_n^{m_n}$ という項は $\frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_n!}$ 個出てくるというわけです．こうして多項式のべき乗を展開したものは

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^k = \sum_{m_1,\ldots,m_n;\sum_{i=1}^{n} m_i=k} \frac{k!}{m_1!m_2!\ldots m_n!} \times a_1^{m_1} \times a_2^{m_2} \times \cdots \times a_n^{m_n}$$

と書けることになります．ただし，シグマ記号の下についている $m_1, \ldots, m_n; \sum_{i=1}^{n} m_i = k$ というのは，$\sum_{i=1}^{n} m_i = k$ となるような n 個の 0 以上の整数，$m_1, \ldots, m_n$ 全ての組み合わせについて全部足し合わせましたよという記号です．この計算結果は多項定理と呼ばれます．これによって特に展開がわかりやすくなっているかというと，そういうわけでもありません（n 個の 0 以上の整数，$m_1, \ldots, m_n$ 全ての組み合わせなんて普通はよくわかりません）．しかし，同じものを別の形で書くことができると便利なことがよくあるので，いろんな形で書けることを知っておく（$\neq$ 覚えておく）ことは大事です（忘れたら必要なときに見返しましょう）．

特に $n = 2$ のときは

$$(a_1 + a_2)^k = \sum_{m_1,m_2;m_1+m_2=k} \frac{k!}{m_1!m_2!} \times a_1^{m_1} \times a_2^{m_2}$$

と書けます．$m_1 + m_2 = k$ ということは $m_2 = k - m_1$ なので，m_1 だけを使って

$$(a_1 + a_2)^k = \sum_{m_1=0}^{k} \frac{k!}{m_1!(k - m_1)!} \times a_1^{m_1} \times a_2^{k-m_1}$$

とよりシンプルに書きなおすことができます．m_1 は 0 以上の整数で，$m_2 = k - m_1$ が 0 以上の整数になるような全てのありうるパターンでということでなければいけません．つまりは m_1 のありうるパターンは 0 から k までということです．なので比較的シンプルに書くことができます．この結果は多項定理よりは頻繁に使われるので，特別に名前がついており，二項定理と呼ばれます．

4.3 応用：投票と棄権

組み合わせの経済学への応用例として，投票の理論を扱います．いま，二人の候補 A と B が選挙に出馬しているとしましょう．ある人物が A 候補に投票する確率は p で残りの $1 - p$ が B 候補に投票する確率だとします．それぞれの確率は独立であるとします．つまり，ある人物が A 候補に投票したからといって，別の人物が A 候補に投票する確率は変わらないものとします．このとき，自分が A 候補の支持者だとして，A 候補に投票する意味はどれだけあるでしょうか．

いま，自分以外の有権者が $2n$ 人いるとします．ここで n は自然数であるとします．すると，多数決によって A 候補が勝つには自分以外の有権者のうち，n 以上の票が A 候補に入る必要があります．しかしながら n より多い数の有権者が A 候補に入れていると自分は投票してもしなくても A 候補が勝つことになります．逆に n より少ない数の有権者しか A 候補に投票していなければ，やはり自分が投票してもしなくても B 候補が勝つので選挙の結果は変わりません．したがって，自分が投票する意味が出てくるのはちょうど自分以外の有権者のうち，n 人が A 候補に投票し，残りの n 人が B 候補に投票するような状況です．この確率はいくらになるでしょうか．

これは実は組み合わせを使って考えることができます．例えば x さんと y さんが両方とも A 候補に投票する確率を考えます．x さんも y さんもそれぞれが A に投票する確率が p です．そしてそれぞれの事象は独立なので，独立であることの定義から $P((\text{x さんが A}) \wedge (\text{y さんが A})) = P(\text{x さんが A}) \times P(\text{y さんが A})$ と書くことができます[*1]．$P(\text{x さんが A})$ も $P(\text{y さんが A})$ も p なので，その確率は p^2 です．この発想で，ある決まった n 人の人が A 候補に投票する確率は，p^n になります．同様に，残りの n 人は B に投票することになるのでその確率は $(1 - p)^n$ です．したがって，ある決まった n 人の人が A 候補に投票するには，残りの n 人が B 候補に投票しなければならないので，合わせてその確率は $p^n(1 - p)^n$ となります．

さて，その A に投票する n 人を選んでくることを考えましょう．まず注意として，ある n 人の組み合わせが A に投票することと，別の n 人の組み合わせが A に投票するという事象は同時に起こりえません．例えば x，y，w，z の 4 人がいたとして，「x，y さんが A に投票し，w，z さんが B に投票する」という事象と「x，z さんが A に投票し，w，y さんが B に投票する」という事象は同時には起き得ません．従ってこれらの事象は排反事象なので，それぞれどちらかが起きるだろうという確率は「x，y さんが A に投票し，w，z さんが B に投票する」という事象の確率と「x，z さんが A に投票し，w，y さんが B に投票する」という事象の確率の和になります．「x，y さんが A に投票し，w，z さんが B に投票する」という事象の確率と「x，z さんが A に投票し，w，y さんが B に投票する」という事象の確率はどちらも $p^2(1 - p)^2$ なので，そのどちらかが起きるかという確率は $2p^2(1 - p)^2$ ということです．

[*1] ある事象 E が起こる確率を $P(E)$ としていることに注意です

この発想を元にすれば，n 人が A に，残りの n 人が B にという現象が起きる確率は $p^n(1-p)^n$ を，そのあり得る組み合わせの数だけ足すことになります．$2n$ 人から n 人を選ぶパターン数は組み合わせの数なので，$\frac{2n!}{(2n-n)!n!} = \frac{2n!}{n!n!}$ であることに注意してください．したがって，A 候補と B 候補に n 人づつ投票する確率は以下のようになります．

$$\frac{2n!}{n!n!}p^n(1-p)^n$$

これは一体どれくらいの確率でしょうか．具体的に，$p = 0.5$ で，$n = 10000$（つまり投票に行く有権者２万人）とすると，だいたい 0.0056 くらいで，0.5% ちょっとです[*2]．つまり自分が投票する意味がある確率が 0.5% ちょっとということです．もっと投票者数が多くなればこの確率はもっと小さくなります．そうすると，ほとんどの投票に行く有権者が，「自分の一票が選挙結果を変えるから投票に行く」と思って投票しているにしては，この確率は小さすぎです．ちょっとめんどくさいというだけで行かなくていいかとなりそうな数字です．一方で，近年いくら投票に行く人が少なくなってきているとはいえ，2〜4 割くらいは投票に行くので，「自分の一票が選挙結果を変えるから投票に行く」という動機は選挙に行く動機としては考えにくいことになってしまいます．「選挙に行くのは自分の一票が選挙結果を変える」というのはもっともらしそうな理由ですが，真面目に確率を考えてみると，大したことはなさそうだと思えてしまうわけです．このような結果は**投票のパラドックス**（合理的に考えた投票率よりも実際の投票率が高すぎる）と呼ばれ，「人々がなぜ選挙に行くか」が研究テーマになる理由の一つです．

[*2] WolframAlpha などで，`20000!/(10000!*10000!)*((0.5)^10000)*(0.5)^10000` と入力すれば計算できます．

第 5 章

微分の補足

5.1 区分線形関数

[*1]本書では微分というものは接線の傾きを求める作業であるとしていました．そして，その微分が経済学のいろいろなところで使われることを学習しました．本節では，それとは似ているが異なったアプローチを紹介します．

本節ではまず**区分線形関数** (piecewise-linear function) というものを紹介します．これは何かというと，次のような関数です．

$$f(x) = \begin{cases} a_1 \cdot (x - b_0) + c & \text{if} \quad x \in [b_0, b_1) \\ a_2 \cdot (x - b_1) + a_1 \cdot (b_1 - b_0) + c & \text{if} \quad x \in [b_1, b_2) \\ \vdots & \\ a_n \cdot (x - b_{n-1}) + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cdot (b_k - b_{k-1}) + c & \text{if} \quad x \in [b_{n-1}, b_n] \end{cases} \tag{5.1}$$

数式で書くと難しいかもしれませんが，図で描くと次のようなものです（図 5.1）．要するに傾きの異なる一次関数をつなぎ合わせたような曲線を示しています．このような関数を考えることのメリットは代表的なものは次のとおりです．

1. 傾きが（目で見て）すぐわかる．
2. (コンピューターなどで) 計算しやすい．
3. 複雑な関数を近似できる．

1 や 2 の利点は明らかです．x の係数だけを見れば，その点での傾きがすぐにわかります．また，いくら複雑な形をしていてもその正体は一次関数の集合体なので微分や積分が簡単にできます．3 の利点は図を見てみるとわかります．図 5.2 は複雑な関数を区分線形関数で近似しています．元の関数の大体の形がわかるので，分析にはこれで十分な場合も多いです．近似の精度を高めたければ，分割をもっと細かくすればより正確になります．

さて，区分線形関数を用いて，本書で行った微分を用いた分析がどのようになるかを見ていきま

[*1] この節は広島修道大学の永岡成人先生 (https://n-nagaoka.net/) の発案によるものです．

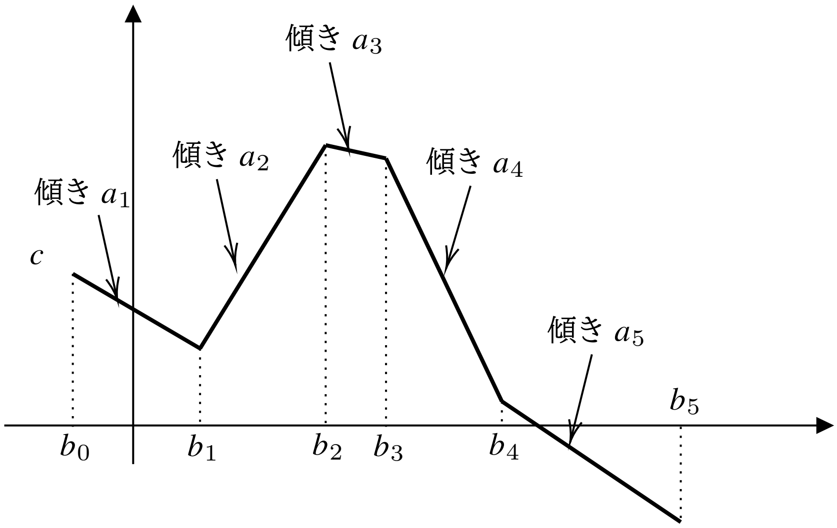


図 5.1　区分線形関数

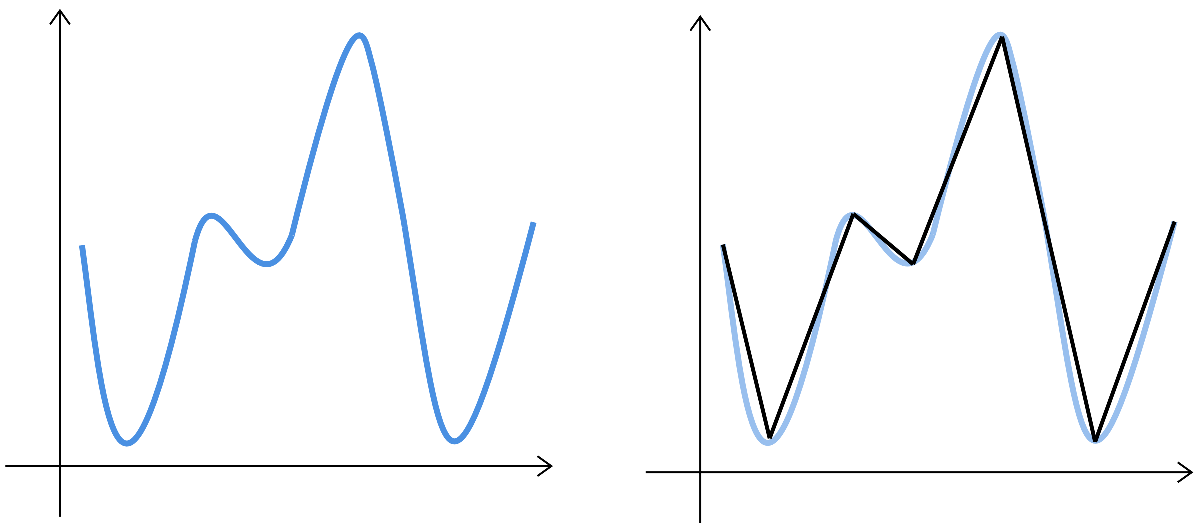


図 5.2　複雑な関数の近似

しょう．

■凹関数　(5.1) 式のような関数を考えます．このとき，関数 f が凹関数であるとは $a_1 > a_2 > \cdots > a_n$ が成立することを言います．つまり傾きがだんだん小さくなることを意味しています．このような凹関数においては関数 f を最大化するような点における傾き，a_k は $a_{k-1} \geqq 0 \geqq a_k$ となることに注意してください．例えば図 5.3 ではこの関数を最大化する点での傾きは a_4 ですが，その直前の傾き a_3 は正で，a_4 は負になっています．

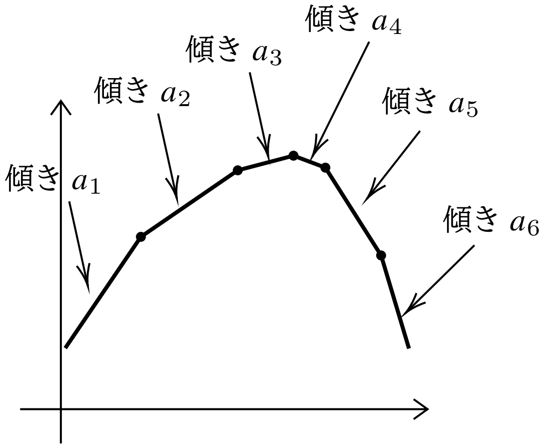


図 5.3　凹関数であるような区分線形関数

■利潤最大化問題　企業の利潤最大化問題を考えます．今，価格受容者である企業の利潤は以下のように書けるものとしましょう．

$$p \cdot q - C(q)$$

そして，費用関数，C は区分線形関数であるとしましょう．例えば以下のような形です．

$$C(q) = \begin{cases} c_1 \cdot q & \text{if} \quad q \in [0, b_1) \\ c_2 \cdot (q - b_1) + c_1 \cdot b_1 & \text{if} \quad q \in [b_1, b_2) \\ \vdots & \\ c_n \cdot (q - b_{n-1}) + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \cdot (b_k - b_{k-1}) & \text{if} \quad q \in [b_{n-1}, b_n] \end{cases}$$

ただし，$c_1 < c_2 \cdots < c_n$ が成り立つとします．

　このとき，利潤を最大化するような生産量はどのような条件を満たすでしょうか．それを考えるために，$p \cdot q - C(q)$ を計算してみます．これは次のように計算されます．

$$pq - C(q) = \begin{cases} (p - c_1) \cdot q & \text{if} \quad q \in [0, b_1) \\ (p - c_2) \cdot (q - b_1) + (p - c_1) \cdot b_1 & \text{if} \quad q \in [b_1, b_2) \\ \vdots & \\ (p - c_n) \cdot (q - b_{n-1}) + \sum_{k=1}^{n-1} (p - c_k) \cdot (b_k - b_{k-1}) & \text{if} \quad q \in [b_{n-1}, b_n] \end{cases}$$

+ 以降の定数の部分は無視して，q の係数だけ眺めてみます．そうすると，傾きが $p - c_k$ のような形をしていることがわかります．もしこれが正ならば，q をもっと増やせば利潤が大きくなるでしょう．$p - c_k$ が負ならば q をもっと減らすべきです．そうすると利潤を最大化している生産量においては $p - c_{k-1} \geqq 0 \geqq p - c_k$ という関係が成立するはずですね．したがって，利潤関数の傾き $p - c_k$ が 0 以下になるような最初のところで利潤が最大になることがわかります．この話は先ほどの凹関数の話と同じですね．「$p - c_k$ が 0 以下になるような最初のところ」を言い換えてみると，$p \leqq c_k$ となるような最初の点 b_{k-1} となります．つまりそのような生産量が利潤を最大化する生産量であるわけです．実際，

b_{k-1} より大きい生産量では傾きが $p - c_j < 0$ となるので，生産量をもっと減らしたほうが利潤が高くなるわけです．費用関数の分割がもっと細かければ，利潤が最大になるような傾きは $p - c_k$ がほぼ 0 の時だということがわかります. つまり，p と費用関数の傾きが同じであるときに利潤が最大になると言えるのです.

第 6 章

積分の補足

6.1 広義積分

積分の範囲に無限が含まれるとき，リーマン積分は正式にはできません．リーマン積分は閉区間をいくらかに区切って，それを含む長方形とそれに含まれる長方形を足し合わせたものを使って考えました．積分の範囲に無限が含まれる時にはそういった作業をしようとすると最初から無限の長方形を足し合わせることとなり，この作業が必ずしもできるとは限らないからです．

しかし，積分範囲に無限が含まれるような積分はよくみられます．例えば正規分布という確率分布は，変数が取る範囲は $-\infty$ から ∞ となります．こういった計算ができないと，このような確率分布を計算するときに不便です．

積分範囲に無限が含まれるような積分を計算する一つの方法は極限を使って考えるというものです．つまり，例えば $\int_0^\infty f(x)dx$ を計算するときには次の極限により積分を計算します．

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n f(x)dx$$

この極限値で，$\int_0^\infty f(x)dx$ を考えるのです．無限大に大きくなるものの扱いというものは，実は非常に難しいのですが，これらの極限値が有限値にある範囲ではそこまで大きな問題にならない（ことが多い）ので，こういった極限をつかって積分範囲が無限になるような積分を考えるのです．こういった積分は広い意味での（リーマン）積分ということで**広義積分**と呼ばれます．

例えば $\int_0^\infty e^{-x}dx$ を計算してみましょう．$-e^{-x}$ は e^{-x} の原始関数なのでこれを使うと以下のような計算ができます．

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x}dx &= \lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-x}dx\\ &= \lim_{n\to\infty}[-e^{-x}]_0^n\\ &= \lim_{n\to\infty}[-e^{-n}+e^0]\\ &= \lim_{n\to\infty}[-\frac{1}{e^n}+1]\\ &= 1\end{aligned}$$

第 7 章

線形代数の補足

7.1　行列のかけ算の補足

行列のかけ算の話を 2×2 行列だけでなく，一般の $n \times m$ 行列で考えてみます．

m 個の成分があるベクトルで k 番目の成分が 1 でそれ以外が全て 0 となるベクトルを $e_m(k)$ とします（これを**単位ベクトル**と呼びます）．このとき，$n \times m$ 行列 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \ddots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$ は m 個の成分からなるベクトル $e_m(k)$ を $\begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix}$ という n 個の成分からなるベクトルに変換するような線形関数です．

この考え方をもとにすれば，$n \times m$ 行列と m 個の成分からなるベクトルのかけ算は次のように考えます．

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = b_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + b_m \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{m} a_{1k} b_k \\ \sum_{k=1}^{m} a_{2k} b_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{m} a_{nk} b_k \end{bmatrix}$$

これは以下の等式が成立することと，線形関数の性質（$f(ax+by)=af(x)+bf(y)$）によるものです．

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = b_1 e_m(1) + b_2 e_m(2) + \cdots + b_m e_m(m) \tag{7.1}$$

繰り返しですが行列 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$ を $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ に作用させると言うことは (7.1) 式における $e_m(k)$ の部分を $\begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix}$ に変形させていることに他ならないのです．

また，この行列に $\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1\ell} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2\ell} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{m\ell} \end{bmatrix}$ をかけると言うのは　次の ℓ 個の m 成分ベクトル,
$\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{m2} \end{bmatrix}$, $\dots$, $\begin{bmatrix} b_{1\ell} \\ b_{2\ell} \\ \vdots \\ b_{m\ell} \end{bmatrix}$ をそれぞれかけてまとめたものになります．つまり行列同士のかけ算は次のように計算できることとなります．

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1\ell} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2\ell} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{m\ell} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{m} a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{m} a_{1k}b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{m} a_{1k}b_{k\ell} \\ \sum_{k=1}^{m} a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{m} a_{2k}b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{m} a_{2k}b_{k\ell} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{m} a_{nk}b_{k1} & \sum_{k=1}^{m} a_{nk}b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{m} a_{nk}b_{k\ell} \end{bmatrix}$$

7.2　行列式の補足

本文では 2×2 および 3×3 までの行列式までしか計算していませんでした．余因子展開を使うことでより一般の行列式を計算することができますが，基本的にそれは面倒です．そこで，行列式が持つ性質を使うことで一般の行列式の計算公式を作ることにしましょう．いま，成分を n 個持つベクトルを n 個考えます．それぞれ，$\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n$ と書くことにしましょう．$\vec{a}_i$ は次のように書くことができるとしま

しょう.

$$\vec{a}_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$$

ここで，この n 個のベクトルについて，行列式 $\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ は次の性質を持ちます.

交代法則

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_i, \ldots, \vec{a}_n) = -\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_i, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n)$$

一致退化法則　もし $\vec{a}_i = \vec{a}_j$ ならば

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = 0$$

分配法則　もし $\vec{a}_i = \vec{b}_i + \vec{c}_i$ ならば

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{b}_i, \ldots, \vec{a}_n) + \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{c}_i, \ldots, \vec{a}_n)$$

スカラー倍法則

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \alpha\vec{a}_i, \ldots, \vec{a}_n) = \alpha \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_i, \ldots, \vec{a}_n)$$

交代法則は i 番目のベクトルと j 番目のベクトルの位置を交換すると行列式が -1 倍されるというものです．一致退化法則は i 番目のベクトルと j 番目のベクトルが等しければ行列式は 0 になるというものです．分配法則はある i 番目のベクトルが二つのベクトルの和（$\vec{a}_i = \vec{b}_i + \vec{c}_i$）でかけるならば，元々の行列式は「$i$ 番目のベクトルを $\vec{b}_i$ にした行列式」と「i 番目のベクトルを $\vec{c}_i$ にした行列式」の和に分解できるということを示しています．スカラー倍法則はある i 番目のベクトルが α 倍されれば，行列式自体も α 倍されるというものです.

この性質を使って，行列式の計算公式を作っていきます．まず，単位ベクトル $e_n(k)$ を用いて，$\vec{a}_i$ が以下のように書けることを確認します.

$$\vec{a}_i = a_{1i}e_n(1) + \cdots + a_{ni}e_n(n)$$

$e_n(k)$ は k 番目の成分だけ 1 で，他は全て 0 であるので，$a_{ki}e_n(k)$ は k 番目の成分だけ a_{ki} で，他は全て 0 であるベクトルとなります．これを全部足し合わせれば $\vec{a}_i$ になることが確認できるでしょうか？よくわからないという人は $n = 3$ のケースで確かめてみましょう.

さて，これを用いて行列式を以下のように書きます

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = \det(a_{11}e_n(1) + \cdots + a_{n1}e_n(n), \ldots, \vec{a}_n)$$

分配法則とスカラー倍法則を用いれば次のような展開ができます.

$$\begin{aligned}
\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) &= \det(a_{11}e_n(1) + \cdots + a_{n1}e_n(n), \ldots, \vec{a}_n) \\
&= \det(a_{11}e_n(1), \ldots, \vec{a}_n) + \det(a_{21}e_n(2) + \cdots + a_{n1}e_n(n), \ldots, \vec{a}_n) \\
&= a_{11}\det(e_n(1), \ldots, \vec{a}_n) + \det(a_{21}e_n(2) + \cdots + a_{n1}e_n(n), \ldots, \vec{a}_n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{k1}\det(e_n(k), \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n)
\end{aligned}$$

同じように，それぞれの k について $\vec{a}_2$ も展開していきます．つまり

$$\det(e_n(k), \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n) = \sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell 2} \det(e_n(k), e_n(\ell), \vec{a}_3 \ldots, \vec{a}_n)$$

$\sum$ の中の記号を ℓ に変えたのは k と被らないようにです．ただ，この調子で n まで展開すると記号が足りなくなるので，k の代わりに k_1，ℓ の代わりに k_2 という記号と使っていくことにしましょう．そうすると上の式は以下のように書き直せます．

$$\det(e_n(k_1), \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n) = \sum_{k_2=1}^{n} a_{k_2 2} \det(e_n(k_1), e_n(k_2), \vec{a}_3 \ldots, \vec{a}_n)$$

これを元の式に戻せば以下のように書けます．

$$\begin{aligned}\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) &= \sum_{k_1=1}^{n} a_{k_1 1} \sum_{k_2=1}^{n} a_{k_2 2} \det(e_n(k_1), e_n(k_2), \vec{a}_3 \ldots, \vec{a}_n) \\ &= \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} a_{k_1 1} a_{k_2 2} \det(e_n(k_1), e_n(k_2), \vec{a}_3 \ldots, \vec{a}_n)\end{aligned}$$

$a_{k_1 1}$ と $\sum\limits_{k_2=1}^{n}$ の順番を交換したのは同じようなものが並んでいた方が見やすいという見栄えのためです[*1]．

これを n まで続けていくと以下のようになります．

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = \sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_n=1}^{n} a_{k_1 1} \cdots a_{k_n n} \det(e_n(k_1), \ldots, e_n(k_n))$$

さて，ここで $\det(e_n(k_1), \ldots, e_n(k_n))$ が何者かということを考えましょう．まず $k_i = k_j$ であれば $e_n(k_i) = e_n(k_j)$ であるので一致退化法則から $\det(e_n(k_1), \ldots, e_n(k_n)) = 0$ となります．そうすると $\det(e_n(k_1), \ldots, e_n(k_n)) \neq 0$ であるような $k_1, \ldots, k_n$ の組み合わせは，その中にかぶるものが一つもないということになります．したがって，それらは $1, \ldots, n$ を単に並び替えただけのものだということがわかります．したがって，そういった $k_1, \ldots, k_n$ というものに注目しましょう

$e_n(k)$ は k 番目の要素だけ 1 でそれ以外が 0 のベクトルであるので，$e_n(k_1), \ldots, e_n(k_n)$ は以下の行列の列を並び替えたものになります．これは対角成分が 1 で，それ以外が 0 となる単位行列です．

$$[e_n(1), \ldots, e_n(n)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

この行列の行列式は余因子展開を使うと 1 となることがわかります．

[*1] なぜ交換できるのかは以下の例を見れば分かりやすいと思います．$a \sum\limits_{i=1}^{n} b_i = a(b_1 + \cdots + b_n) = (ab_1 + \cdots + ab_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} ab_i$．

さらに，行列式は列を入れ替えるたびに -1 倍されるので，$e_n(k_1), \ldots, e_n(k_n)$ の列を奇数回入れ替えて $e_n(1), \ldots, e_n(n)$ になるならば $\det(e_n(k_1), \ldots, e_n(k_n)) = -1$，偶数回入れ替えで $e_n(1), \ldots, e_n(n)$ になるならば $\det(e_n(k_1), \ldots, e_n(k_n)) = 1$ となります．

$n = 3$ のケースで見てみましょう．例えば，$k_1 = 3, k_2 = 1, k_3 = 2$ であれば，

$$[e_3(k_1), e_3(k_2), e_3(k_3)] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1 番目と 2 番目を入れ替えて $1, 3, 2$，そして 2 番目と 3 番目を入れ替えて $1, 2, 3$ とできるので２回の入れ替えで単位行列 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ にすることができます．したがって，$\det(e_3(k_1), e_3(k_2), e_3(k_3)) = 1$ となります．

任意の並び替え $k_1, \ldots, k_n$ について，偶数回の入れ替えで $1, \ldots, n$ になるならば 1 を出力し，偶数回の入れ替えで $1, \ldots, n$ になるならば -1 を出力する関数を sgn と書きます．そうすれば一般の行列式は次のように書くことができます．

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = \sum_{k_1, \ldots, k_n : k_i \neq k_j} a_{k_1 1} \cdots a_{k_n n} \operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_n)$$

ただし $\sum_{k_1, \ldots, k_n : \forall i, j, k_i \neq k_j}$ は $k_i \neq k_j$ が任意の i と j について成り立つような $k_1, \ldots, k_n$ の組み合わせについて足し合わせているという意味になります．

第 8 章

多変数関数の微分の補足

8.1 要素需要関数の導出

$f(K, L) = K^{\alpha} L^{\beta}$ のケースについて要素需要関数の導出を行います．まず一階条件は次のとおりでした．

$$p\alpha K^{\alpha-1} L^{\beta} = r$$
$$p\beta K^{\alpha} L^{\beta-1} = w$$

これは $pf(K, L) - rK - wL = pK^{\alpha} L^{\beta} - rK - wL$ をそれぞれ K, L で微分すると出てきます．p を忘れないようにしてください．

上の連立方程式を解くと次のようになります．

$$\frac{\alpha}{\beta}\frac{L}{K} = \frac{r}{w} \qquad \Rightarrow \qquad L = \frac{\beta}{\alpha}\frac{r}{w}K$$

この解き方としては，例えば $p\alpha K^{\alpha-1} L^{\beta} = r$ から $pK^{\alpha} L^{\beta} = \dfrac{rK}{\alpha}$ がわかり，また $p\beta K^{\alpha} L^{\beta-1} = w$ から $pK^{\alpha} L^{\beta} = \dfrac{wL}{\beta}$ がわかります．この二つの等式を結びつければ $\dfrac{rK}{\alpha} = \dfrac{wL}{\beta}$ が導かれます．これを整理すれば $L = \frac{\beta}{\alpha}\frac{r}{w}K$ が得られます．

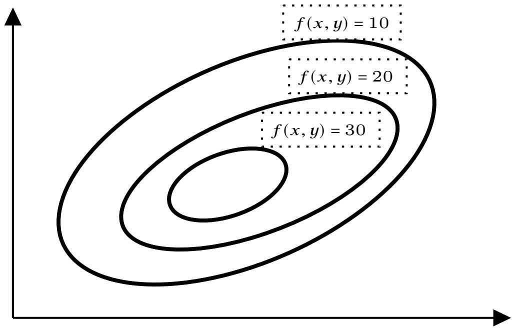


図 8.1　等高線

これを今度は一階条件 $p\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta}=r$ に代入します．すると次のような計算が可能です．

$$
\begin{aligned}
& & p\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta} &= r \\
&\Rightarrow & p\alpha K^{\alpha-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{r}{w}K\right)^{\beta} &= r \\
&\Rightarrow & p\alpha K^{\alpha-1}\left(\beta\times\alpha^{-1}\times r\times w^{-1}\times K\right)^{\beta} &= r \\
&\Rightarrow & p\alpha K^{\alpha-1}\beta^{\beta}\times\alpha^{-\beta}\times r^{\beta}\times w^{-\beta}\times K^{\beta} &= r \\
&\Rightarrow & p\alpha^{1-\beta}K^{\alpha+\beta-1}\beta^{\beta}\times r^{\beta}\times w^{-\beta} &= r \\
&\Rightarrow & K^{\alpha+\beta-1} &= p^{-1}\alpha^{\beta-1}\beta^{-\beta}w^{\beta}r^{1-\beta} \\
&\Rightarrow & K &= p^{\frac{-1}{\alpha+\beta-1}}\alpha^{\frac{\beta-1}{\alpha+\beta-1}}\beta^{\frac{-\beta}{\alpha+\beta-1}}w^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}}r^{\frac{1-\beta}{\alpha+\beta-1}} \qquad (\text{両辺を } \tfrac{1}{\alpha+\beta-1} \text{ 乗}) \\
&\Rightarrow & K &= p^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}\alpha^{\frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta}}\beta^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}}w^{\frac{-\beta}{1-\alpha-\beta}}r^{-\frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta}}
\end{aligned}
$$

基本的には指数法則によってべき乗を展開していき，また同じ変数に指数の部分をまとめていくだけです．最後の変形は別にしなくても良いですが，$1>\alpha+\beta$ がわかっているので，各変数の指数の部分が正か負かをわかりやすくするために正負を入れ替えています．L についても同様の計算を行います．計算した結果の K,L が対称的になっているかが計算ミスを発見するポイントです．つまり K と L の違いは α,β および r,w においてのみです．それらを入れ替えれば同じになるかどうかを確かめます．

8.2　等高線と無差別曲線

陰関数の応用例として，等高線というものを描く式を考えることができます．等高線とは $f(x,y)=z$ になるような (x,y) の集合です．この場合 z が高さを指しています．図 8.1 がそれを図示したものの例になります．同じ線の上の点は同じ高さ（$f(x,y)$ の値が同じ）になるということを意味しています． 図 8.1 で言えば，一番外側の線が値が 10 になる (x,y) の集合で，一番内側の線が値が 30 になる (x,y) の集合になります．この図から，(x,y) がどの位置にあれば関数の値 $f(x,y)$ が大きくなるのかを視認することができます．

等高線の傾きは陰関数の微分を使って求めます．等高線の定義 $f(x,y)=z$ における y を x の関数として，$f(x,g(x))=z$ と書けば陰関数と考えられますね．この定義式の両辺 x で微分すれば，チェーン

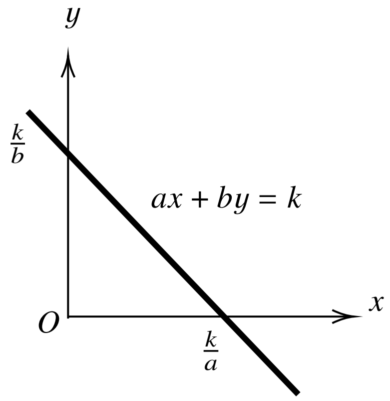


図 8.2　$ax + bx = k$ となる (x, y) の集合

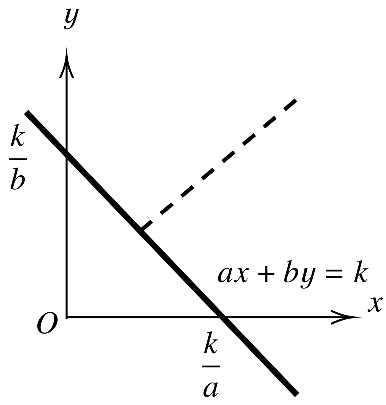


図 8.3　法線ベクトル

ルールより

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))g'(x) = 0$$

となります．よって，

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}$$

が等高線の傾きとなります．

経済学でよく使われる等高線として無差別曲線というものがあります．15 章で出てくる効用関数 $u(q_x, q_y)$ について，効用が一定の水準（例えばその水準を z と書きましょう）になるような財 x の数量 q_x と財 y の数量 q_y の組み合わせの集合です．つまりは $u(q_x, q_y) = z$ となるような (q_x, q_y) の集合です．このように見ればこれが等高線の一種だと考えることができますね．無差別曲線はミクロ経済学では頻繁に使われるものなのでここでこれが何ものかを理解しておきましょう．

8.3　偏微分と法線ベクトル

$ax + by = k$ を満たすような (x, y) の組み合わせを考えてみましょう．これは $y = -\frac{a}{b}x + \frac{k}{b}$ と変形できるので，図 8.2 における直線がその組み合わせを表しています．つまりはその直線の上の点どれを取っても $ax + by = k$ という等式が満たされるということです．

ここで，この直線に垂直になるような線分を考えましょう．図 8.3 の点線がその一例です．垂直であればその位置はどこでも構いません．それをベクトルとして考えたものを $ax + by = k$ の法線ベクトルと言います．

この法線ベクトルを求めることにします．法線ベクトルは直線 $ax + by = k$ と垂直になることから，$ax + by = k$ を通るベクトルとの内積が 0 になります．$ax + by = k$ を通る 2 点を $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ だとすると，$(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ は $ax + by = k$ を通るベクトルになります（図 8.4 参照）．(x_2, y_2) から出発して，横軸方向に $x_1 - x_2$ だけ進み，縦軸方向に $y_1 - y_2$ だけ進んで (x_1, y_1) にたどり着くようなベクトルという感じですね．

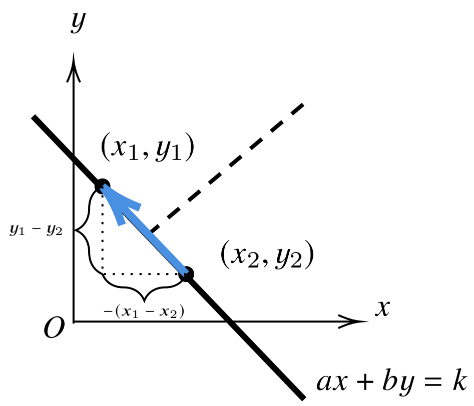


図 8.4　直線上のベクトル

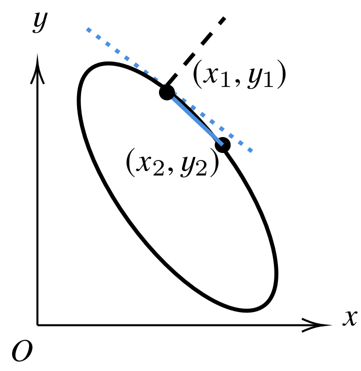


図 8.5　法線ベクトルと勾配ベクトル

さて，(x_1, y_1) と (x_2, y_2) は $ax + by = k$ の上の点であるので共に

$$ax_1 + by_1 = k, \quad ax_2 + by_2 = k$$

が成立します．したがって，

$$\begin{aligned} & ax_1 + by_1 = k, \quad ax_2 + by_2 = k \\ \Rightarrow \quad & ax_1 + by_1 = k = ax_2 + by_2 \\ \Rightarrow \quad & ax_1 + by_1 = ax_2 + by_2 \\ \Rightarrow \quad & a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = 0 \end{aligned}$$

と式変形することができます．そうするとこの左辺は (a, b) というベクトルと，$(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ というベクトルの内積と考えられ，それが 0 になるので (a, b) というベクトルと，$(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ というベクトルは垂直だということになります．つまり，(a, b) が直線 $ax + by = k$ の法線ベクトルということになるわけです．

さて，この法線ベクトルを使って，偏微分が何を指しているかということを考えます．偏微分は，テイラー展開により

$$f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}(x_1 - x_2) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}(y_1 - y_2)$$

と書けるということでした．もし，(x_1, y_1) と (x_2, y_2) が同じ等高線の上にあったとすれば $f(x_1, y_1) = z = f(x_2, y_2)$ とできるので

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}(x_1 - x_2) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}(y_1 - y_2) = 0$$

と書き直すことができます．

図 8.5 をみてみましょう．(x_1, y_1) と (x_2, y_2) を結ぶ線分は (x_2, y_2) が十分に近ければ，等高線（図中の黒い楕円）の接線（青い点線）になります．つまりは $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ というのは等高線の接線を表すベクトルで，その法線ベクトルが $(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y})$ だと考えることができます．これは勾配ベクトルと呼ばれていました．つまり勾配ベクトルとは等高線の接線の法線ベクトルということになります．

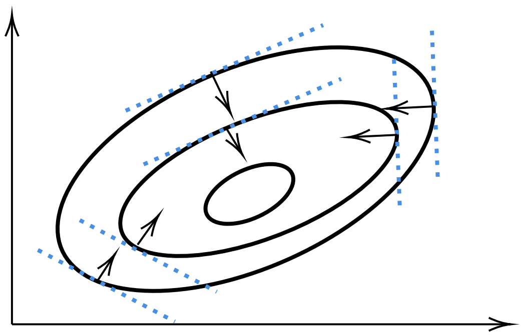


図 8.6　勾配ベクトルと等高線

さて，その話に基づいて，等高線と勾配ベクトルを図に描いていきます．図 8.6 を見てください．これを見ると，勾配ベクトルの指し示す方向により大きい値を示す（逆向きに書けば逆に小さい値を示す）等高線があることがわかります．このように勾配ベクトルは関数の値が大きくなる（あるいは小さくなる）方向を指し示すベクトルであるということがわかります．

第 9 章

制約付き最大化問題の補足

9.1 CES 型効用関数

書籍では主に $u(q_1, q_2) = (q_1)^{\alpha}(q_2)^{\beta}$ という形の効用関数を扱っていました．これはコブ=ダグラス型効用関数と呼ばれます．この補足ではより一般的な形の効用関数，$u(q_1, q_2) = \left[\alpha(q_1)^k + \beta(q_2)^k\right]^{1/k}$ という形の効用関数を考えます．これは CES 型効用関数と呼ばれます．この形の関数も非常によく使われますのでこの解法をここで解説しておきます．

まず初めに，$k > 0$ であれば $f(x) = (x)^{1/k}$ という関数は単調増加関数です．（微分して正であることにより確かめられます）なので中身の $\alpha(q_1)^k + \beta(q_2)^k$ だけを考えて効用最大化問題を解いても同じことになります．ラグランジュの一階条件を用いると

$$
\begin{aligned}
\alpha k(q_1)^{k-1} &= \lambda p_1 \\
\beta k(q_2)^{k-1} &= \lambda p_2
\end{aligned}
$$

という式が得られます．この式を次のように変形します．

$$
\begin{aligned}
\alpha k(q_1)^{k-1} &= \lambda p_1 \\
(q_1)^{k-1} &= \lambda \frac{p_1}{\alpha k} \\
q_1 &= \left(\lambda \frac{p_1}{\alpha k}\right)^{1/(k-1)} \\
q_1 &= \lambda^{1/(k-1)} \left(\frac{p_1}{\alpha k}\right)^{1/(k-1)} \qquad (9.1)
\end{aligned}
$$

同様に以下の式も得られます．

$$
q_2 = \lambda^{1/(k-1)} \left(\frac{p_2}{\beta k}\right)^{1/(k-1)} \qquad (9.2)
$$

これで q_1, q_2 が求められたように見えますが，λ がなにかわからないのでまた解けてはいません．この λ を求めてみます．

予算制約から以下の等式が成立することを思い出してください．

$$
p_1 q_1 + p_2 q_2 = I
$$

この式に先ほど求めた q_1, q_2 を代入します．

$$
\begin{aligned}
& p_1\lambda^{1/(k-1)}\left(\frac{p_1}{\alpha k}\right)^{1/(k-1)} + p_2\lambda^{1/(k-1)}\left(\frac{p_2}{\beta k}\right)^{1/(k-1)} = I \\
\Rightarrow\quad & \lambda^{1/(k-1)}\left(p_1\left(\frac{p_1}{\alpha k}\right)^{1/(k-1)} + p_2\left(\frac{p_2}{\beta k}\right)^{1/(k-1)}\right) = I \qquad (\lambda^{1/(k-1)}\text{ でくくる}) \\
\Rightarrow\quad & \lambda^{1/(k-1)} = \frac{I}{\left(p_1\left(\frac{p_1}{\alpha k}\right)^{1/(k-1)} + p_2\left(\frac{p_2}{\beta k}\right)^{1/(k-1)}\right)} \qquad (\lambda^{1/(k-1)}\text{ の係数で両辺を割る})
\end{aligned}
$$

この λ^{k-1} を (9.1) と (9.2) に代入すればマーシャル型の需要関数を計算することができます．

$$
q_1 = I\frac{\left(\frac{p_1}{\alpha k}\right)^{1/(k-1)}}{\left(p_1\left(\frac{p_1}{\alpha k}\right)^{1/(k-1)} + p_2\left(\frac{p_2}{\beta k}\right)^{1/(k-1)}\right)}
$$

$$
q_2 = I\frac{\left(\frac{p_2}{\beta k}\right)^{1/(k-1)}}{\left(p_1\left(\frac{p_1}{\alpha k}\right)^{1/(k-1)} + p_2\left(\frac{p_2}{\beta k}\right)^{1/(k-1)}\right)}
$$

検算方法として，$p_1q_1 + p_2q_2 = I$ になるかどうかを確かめてみてください．

9.2　不等号制約下の最適化問題の補足

15.4 節において，ラグランジュ乗数法が使えない不等号制約下の最適化問題の例として以下の問題を考えました．

例 1. $\max_{x,y} -(x-2)^2 - (y-1)^2$ s.t. $x + 2y \leqq 5$
例 2. $\max_{x,y} 2x + y$ s.t. $x + 2y \leqq 5, x \geqq 0, y \geqq 0$

これらの問題は工夫をすればフリッツ・ジョン条件などを使わなくても解くことができますが，もちろんフリッツ・ジョン条件を使っても解くことができます．ここでは次の一般化した問題で考えてみましょう．

例 1'. $\max_{x,y} -(x-a)^2 - (y-b)^2$ s.t. $px + qy \leqq r$
例 2'. $\max_{x,y} ax + by$ s.t. $px + qy \leqq r, x \geqq 0, y \geqq 0$

ただしここでは a, b, p, q, r はすべて正の数であるとします．

■例 1' の解法　フリッツ・ジョン条件より以下の等式が成り立ちます．

$$
\begin{aligned}
-\lambda_0 2(x-a) - \lambda_1 p &= 0\\
-\lambda_0 2(x-b) - \lambda_1 q &= 0\\
\lambda_1(r - px - qr) &= 0
\end{aligned}
$$

まず，$\lambda_0 \neq 0$ を確認します．背理法の仮定として，$\lambda_0 = 0$ であれば $-\lambda_0 2(x-a) - \lambda_1 p = 0$ から $\lambda_1 = 0$ となるので，ラグランジュ乗数が全て 0 になります．ラグランジュ乗数は少なくとも一つは正にならなければいけないので矛盾します．したがって，$\lambda_0 \neq 0$ がわかります．そこで $\lambda_0 = 1$ とおきましょう．

このときフリッツ・ジョン条件は以下の通りです

$$
\begin{aligned}
-2(x-a) - \lambda_1 p &= 0\\
-2(x-b) - \lambda_1 q &= 0\\
\lambda_1(r - px - qr) &= 0
\end{aligned}
$$

ここから

$$
x = -\frac{\lambda_1 p}{2} + ay = -\frac{\lambda_1 q}{2} + b
$$

がわかります．

次に場合分けをしていきます．まず $r \geqq pa + qb$ であれば $x = a, y = b$ が最適解です．

それでは $r < pa + qb$ のケースを考えましょう．このとき，$r > px + qr$ が満たされるときの解 $x = a, y = b$ は制約条件を満たしません．したがって，$r = px + qy$ だということになります．すると

$$
\begin{aligned}
r &= -p\frac{\lambda_1 p}{2} + pa - q\frac{\lambda_1 q}{2} + qb\\
r - (pa + qb) &= -\lambda_1\left(\frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2}\right)\\
\lambda_1 &= \frac{(pa+qb) - r}{\frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2}}
\end{aligned}
$$

と計算できることになり，これを x, y の式に代入すれば

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{(pa+qb) - r}{\frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2}}\frac{p}{2} + a\\
y &= \frac{(pa+qb) - r}{\frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2}}\frac{q}{2} + b
\end{aligned}
$$

と計算できることになります．まとめれば，以下の通りです．

1. $r \geqq pa + qb$ のとき，$x = a, y = b$
2. $r < pa + qb$ のとき，

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{(pa+qb) - r}{\frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2}}\frac{p}{2} + a\\
y &= \frac{(pa+qb) - r}{\frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2}}\frac{q}{2} + b
\end{aligned}
$$

■例 2′ の解法　フリッツ・ジョン条件より以下の等式が成り立ちます．

$$\lambda_0 a - \lambda_1 p + \lambda_2 = 0$$
$$\lambda_0 b - \lambda_1 q + \lambda_3 = 0$$
$$\lambda_1(r - px - qr) = 0, \quad \lambda_2 x = 0, \quad \lambda_3 y = 0$$

まず，$\lambda_0 \neq 0$ を確かめます．もし $\lambda_0 = 0$ であるとしたら以下の等式が成り立ちます．

$$\lambda_1 p = \lambda_2$$
$$\lambda_1 q = \lambda_3$$

このことから，$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は全て正にならなければいけません．そうでなければすべて 0 になってしまうからです．そうすると，$\lambda_1(r - px - qr) = 0$，$\lambda_2 x = 0$，$\lambda_3 y = 0$ から $x = y = 0$ かつ $px + qy = r$ となりますが，$r > 0$ であるのでこれは矛盾です．したがって $\lambda_0 > 0$ となります．というわけで $\lambda_0 = 1$ としましょう．

フリッツ・ジョン条件は次のとおりです．

$$a - \lambda_1 p + \lambda_2 = 0$$
$$b - \lambda_1 q + \lambda_3 = 0$$
$$\lambda_1(r - px - qr) = 0, \quad \lambda_2 x = 0, \quad \lambda_3 y = 0$$

この条件をみると，以下の式には x, y が含まれないので x, y を求めるには機能していません．

$$a - \lambda_1 p + \lambda_2 = 0$$
$$b - \lambda_1 q + \lambda_3 = 0$$

したがって，制約条件を考えていきます．

つぎに最大化解においては $r = px + qy$ であることを示します．そうでなければ $r > px + qy$ ですが，$a, b > 0$ であるので，x か y をほんの少しでも増やせば $ax + by$ の値を増やせるので最大化解であることに反します．したがって，$r = px + qy$ が満たされます．

さらに λ_2, λ_3 について場合分けを考えます．$\lambda_2 > 0$ かつ $\lambda_3 > 0$ は $x = y = 0$ になってあり得ないので他のケースで考えます．

1. $\lambda_2 > 0$ のとき：このとき $x = 0$ です．すると $r = px + qr$ から $y = r/q$ です．
2. $\lambda_3 > 0$ のとき：このとき $y = 0$ です．すると $r = px + qr$ から $x = r/p$ です．
3. $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ のとき：以下の式から

$$a - \lambda_1 p + \lambda_2 = 0$$
$$b - \lambda_1 q + \lambda_3 = 0$$

$$a/p = \lambda_1 = b/q$$

となります．

従って a/p と b/q の関係が場合分けの鍵になりそうです．そこで次の場合分けを考えます．

1. $a/p = b/q$ のとき．このとき

$$ax + by = \lambda_1 px + \lambda_1 qy = \lambda(px + qy)$$

となるので，$r = px + qy$ を満たします，x, y について，$ax + by$ の値は全て同じになります．よって最大化解は $r = px + qy$ を満たす，x, y（ただし $x \geqq 0, y \geqq 0$ も満たす）の集合となります．

2. $a/p > b/q$ のとき．このとき，$a/p = k_x > b/q = k_y$ とすれば

$$ax + by = k_x px + k_y qy$$

となります. このとき，$x = r/p$，$y = 0$ について，

$$ax + by = k_x r = ar/p$$

となります．一方で，$r = px + qy$ を満たす他の (x, y) については

$$ax + by = k_x px + k_y qy < k_x(px + qy) = k_x r = ar/p$$

となるので，$x = r/p$，$y = 0$ としたときの値よりも小さくなります．したがって，$x = r/p$，$y = 0$ が最大化解です．

3. $a/p < b/q$ のとき．このとき，$a/p = k_x < b/q = k_y$ とすれば

$$ax + by = k_x px + k_y qy$$

となります. このとき，$x = 0$，$y = r/q$ について，

$$ax + by = k_y r = br/p$$

となります．一方で，$r = px + qy$ を満たす他の (x, y) については

$$ax + by = k_x px + k_y qy < k_y(px + qy) = k_y r = br/q$$

となるので，$x = 0$，$y = r/q$ としたときの値よりも小さくなります．したがって，$x = 0$，$y = r/q$ が最大化解です．

第 10 章

動学システムと最適化の補足

10.1　最適貯蓄問題における α の計算方法の補足

まず式 (16.6) を $\ln(\alpha)$ についてまとめます

$$
\begin{aligned}
& \beta\ln\alpha A = \ln(\tfrac{1}{1+\delta\beta}A) + \delta\beta\ln(\alpha A\tfrac{\delta\beta}{1+\delta\beta}) \\
\Rightarrow\quad & \beta\ln\alpha + \beta\ln(A) = \ln(\tfrac{1}{1+\delta\beta}) + \ln(A) + \delta\beta[\ln(\alpha) + \ln(A) + \ln(\tfrac{\delta\beta}{1+\delta\beta})] && (\ln\text{ を足し算で分解}) \\
\Rightarrow\quad & \beta\ln\alpha - \beta\delta\ln(\alpha) = \ln(\tfrac{1}{1+\delta\beta}) - \beta\ln(A) + \ln(A) + \delta\beta[\ln(A) + \ln(\tfrac{\delta\beta}{1+\delta\beta})] && (\text{左辺に }\ln\alpha\text{ を移動}) \\
\Rightarrow\quad & \beta(1-\delta)\ln\alpha = \ln(\tfrac{1}{1+\delta\beta}) + (1-\beta(1-\delta))\ln(A) + \delta\beta[\ln(\delta\beta) + \ln(\tfrac{1}{1+\delta\beta})] && (\text{項をまとめる}) \\
\Rightarrow\quad & \beta(1-\delta)\ln\alpha = (1+\delta\beta)\ln(\tfrac{1}{1+\delta\beta}) + (1-\beta(1-\delta))\ln(A) + \delta\beta\ln(\delta\beta) && (\text{項をまとめる})
\end{aligned}
$$

$\beta = \frac{1}{1-\delta}$ を代入すると次のようになります.

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\quad & \ln\alpha = (1+\tfrac{\delta}{1-\delta})\ln(\tfrac{1}{1+\frac{\delta}{1-\delta}}) + \tfrac{\delta}{1-\delta}\ln(\tfrac{\delta}{1-\delta}) && (A\text{ の係数が 0 になることに注意}) \\
\Rightarrow\quad & \ln\alpha = (\tfrac{1}{1-\delta})\ln(1-\delta) + \tfrac{\delta}{1-\delta}\ln(\tfrac{\delta}{1-\delta}) && (1+\tfrac{\delta}{1-\delta} = \tfrac{1}{1-\delta}\text{ を利用する}) \\
\Rightarrow\quad & \ln\alpha = (\tfrac{1}{1-\delta})\ln(1-\delta) + \tfrac{\delta}{1-\delta}\ln(\delta) + \tfrac{\delta}{1-\delta}\ln(\tfrac{1}{1-\delta}) && (\ln\text{ の中身を分解}) \\
\Rightarrow\quad & \ln\alpha = (\tfrac{1}{1-\delta})\ln(1-\delta) + \tfrac{\delta}{1-\delta}\ln(\delta) - \tfrac{\delta}{1-\delta}\ln(1-\delta) && (\ln(\tfrac{1}{1-\delta}) = -\ln(1-\delta)\text{ より}) \\
\Rightarrow\quad & \ln\alpha = \ln(1-\delta) + \tfrac{\delta}{1-\delta}\ln(\delta) && (\ln(1-\delta)\text{ についてまとめる}) \\
\Rightarrow\quad & \ln\alpha = \ln(1-\delta) + \ln(\delta^{\frac{\delta}{1-\delta}}) && (\text{対数法則（べき乗）}) \\
\Rightarrow\quad & \ln\alpha = \ln((1-\delta)\delta^{\frac{\delta}{1-\delta}}) && (\text{対数法則（積）}) \\
\Rightarrow\quad & \alpha = (1-\delta)\delta^{\frac{\delta}{1-\delta}} && (\ln\text{ の中身を比較})
\end{aligned}
$$

第 11 章

記号の読み方一覧

※ 下記の読み方や意味が唯一の正解ではありません． 記号の意味や読み方は文脈，言語，著者によって異なります．

11.1 数学によく使われる記号

記号	一般的な読み方や意味	英語
$>$	大なり	greater than
$\geq, \geqq, \geqslant$	大なりイコール	is greater than or equal to
$<$	小なり	less than
$\leq, \leqq, \leqslant$	小なりイコール	is less than or equal to
$=$	イコール，等しい	equal
$\neq$	ノットイコール，等しくない	not equal
$\equiv$	合同，同値	equivalent
$\approx, \fallingdotseq$	ほとんど等しい，約	approximately equal, nearly equal
$:=, \overset{\mathrm{def}}{=}$	（左辺を右辺で）定義する	define
$(,)$	小括弧，丸括弧	parenthesis
$\{, \}$	中括弧，波括弧	brace
$[,]$	大括弧，角括弧	bracket
$/$	スラッシュ	slash
$\backslash$	バックスラッシュ	back slash
$*$	アスタリスク，スター，星	asterisk
$\hat{\ }$	ハット，キャレット	hat, caret
$\tilde{\ }$	ティルダ	tilde
$\bar{\ }$	バー	bar

次ページへ

前ページから続き

記号	一般的な読み方や意味	英語
$'$	プライム，ダッシュ，微分記号（ライプニッツ式）	prime, dash
$\dot{}$	ドット，微分記号（ニュートン式）	dot
∂	偏微分記号, パーシャル, ラウンドディー	partial, cursive d
∇	ナブラ	nabla
∞	無限大	infinity
$\lim$	極限	limit
$\because$	なぜなら	because
$\therefore$	したがって	therefore
$\square$, $\blacksquare$	証明終了の記号，ハルモス記号，QED	Halmos symbol, QED mark
$\exists$	存在する，存在量化子	exist(s)
$\forall$	任意の，すべての，全称量化子	for all
$\in$	属する, 要素である	in, is an element of
$\notin$	属さない	not in
$\subset$	含まれる，部分集合である	is included, is a subset of
$\supset$	含む	include(s), is a superset of
$\setminus$	集合差	set minus
$\cup$	合併，集合和	cup, union
$\cap$	結び，共通部分	cap, intersection
$\emptyset$, $\varnothing$	空集合，空，ウー	empty set
$\mathbb{R}$, $\mathbf{R}$	実数の集合	the set of real numbers
$\mathbb{R}_+$, $\mathbf{R}_+$	非負の実数の集合	the set of nonnegative real numbers
$\mathbb{R}_{++}$, $\mathbf{R}_{++}$	正の実数の集合	the set of positive real numbers
$\mathbb{Q}$, $\mathbf{Q}$	有理数の集合	the set of rational numbers
$\mathbb{Z}$, $\mathbf{Z}$	整数の集合	the set of integers
$\mathbb{N}$, $\mathbf{N}$	自然数の集合	the set of natural numbers

11.2　ギリシャ文字

以下はギリシャ文字の一覧である．基本的に記号が足りないときに使う．ε，ϵなど同じ文字に複数の字体があるものもある．書き順や発音は Youtube などで “How to write greek alphabet” や “greek alphabet” で検索して調べてください．

記号（小文字）	記号（大文字）	カタカナ読み	英語のスペル
α	Α	アルファ	alpha
β	Β	ベータ，ヴィタ	beta
γ	Γ	ガンマ，ガマ	gamma
δ	Δ	デルタ	delta
ε, ϵ	Ε	エプシロン	epsilon
ζ	Ζ	ゼータ	zeta
η	Η	エータ，イータ	eta
θ	Θ	シータ，セータ	theta
ι	Ι	イオタ，ヨータ	iota
κ	Κ	カッパ，カパ	kappa
λ	Λ	ラムダ	lambda
μ	Μ	ミュー，ミ	mu
ν	Ν	ニュー，ニ	nu
ξ	Ξ	クシー，クシ	xi
ο	Ο	オミクロン	omicron
π, ϖ[*1]	Π	パイ，ピー	pi
ρ, ϱ	Ρ	ロー	rho
σ, ς[*2]	Σ	シグマ	sigma
τ	Τ	タウ，タフ	tau
υ	Υ	ユプシロン，ウプシロン	upsilon
φ, ϕ	Φ	ファイ，フィ	phi
χ	Χ	カイ，キー	chi
ψ	Ψ	プサイ，プシ	psi
ω	Ω	オメガ	omega
		古代に廃れたギリシャ文字	
ϝ	Ϝ	ディガンマ	digamma
ϛ	Ϛ	スティグマ	stigma
ϟ, ϙ	Ϙ	コッパ	koppa

*1 π の筆記体．形が ω に似ているのでオメガパイとも言う．

*2 σ の異字体．ギリシャ語では文末に来るときに使う．

ϡ	Ϡ	サンピ	sampi

11.3　ドイツ文字, 筆記体, 花文字

以下はドイツ文字（フラクトゥール），筆記体（カリグラフィー），花文字（スクリプト）の一覧である．基本的に（主に歴史的な理由で）特定の記号を表すときや記号が足りなくなったときなどに使われる．

ドイツ文字	筆記体	花文字	アルファベット
$\mathfrak{A}$	$\mathcal{A}$	$\mathscr{A}$	A
$\mathfrak{B}$	$\mathcal{B}$	$\mathscr{B}$	B
$\mathfrak{C}$	$\mathcal{C}$	$\mathscr{C}$	C
$\mathfrak{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathscr{D}$	D
$\mathfrak{E}$	$\mathcal{E}$	$\mathscr{E}$	E
$\mathfrak{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathscr{F}$	F
$\mathfrak{G}$	$\mathcal{G}$	$\mathscr{G}$	G
$\mathfrak{H}$	$\mathcal{H}$	$\mathscr{H}$	H
$\mathfrak{I}$	$\mathcal{I}$	$\mathscr{I}$	I
$\mathfrak{J}$	$\mathcal{J}$	$\mathscr{J}$	J
$\mathfrak{K}$	$\mathcal{K}$	$\mathscr{K}$	K
$\mathfrak{L}$	$\mathcal{L}$	$\mathscr{L}$	L
$\mathfrak{M}$	$\mathcal{M}$	$\mathscr{M}$	M
$\mathfrak{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathscr{N}$	N
$\mathfrak{O}$	$\mathcal{O}$	$\mathscr{O}$	O
$\mathfrak{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathscr{P}$	P
$\mathfrak{Q}$	$\mathcal{Q}$	$\mathscr{Q}$	Q
$\mathfrak{R}$	$\mathcal{R}$	$\mathscr{R}$	R
$\mathfrak{S}$	$\mathcal{S}$	$\mathscr{S}$	S
$\mathfrak{T}$	$\mathcal{T}$	$\mathscr{T}$	T
$\mathfrak{U}$	$\mathcal{U}$	$\mathscr{U}$	U
$\mathfrak{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathscr{V}$	V
$\mathfrak{W}$	$\mathcal{W}$	$\mathscr{W}$	W
$\mathfrak{X}$	$\mathcal{X}$	$\mathscr{X}$	X
$\mathfrak{Y}$	$\mathcal{Y}$	$\mathscr{Y}$	Y
$\mathfrak{Z}$	$\mathcal{Z}$	$\mathscr{Z}$	Z