中級経済数学 2

講義スライド

位相・積分・確率論・知識の理論・ゲーム理論への応用

多鹿 智哉（日本大学 経済学部）

0. 講義について

テーマ：位相，積分，確率論とゲーム理論への応用
方針：厳密性は重視せず，豊富なトピックを簡単な例とともに学ぶ

1. オリエンテーション
2. 位相と連続性
3. 開集合と閉集合
4. ワイエルシュトラスの極値定理
5. 積分の復習
6. 総和記号と級数の収束
7. 重積分：フビニの定理
8. 重積分：変数変換
9. 知識の理論
10. 確率論の基礎
11. 条件付き確率と条件付き期待値
12. 大数の（弱）法則
13. 応用：電子メールゲーム
14. 応用：同意定理
15. 応用：オークション

1. 数列と収束

【定義】距離関数

$d : A \times A \to \mathbb{R}$ が以下を満たすとき**距離関数**：

1. $d(x,y) \geq 0$，$d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$
2. $d(x,y) = d(y,x)$
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$（三角不等式）

【定義】収束

数列 (a_n) が $x \in A$ に**収束**：任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある N が存在し，$n \geq N$ なら $d(a_n, x) < \varepsilon$.

収束の直感：n が十分大きければ a_n は x の任意に近い範囲に入る

部分列：$\xi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$（$\xi(n) < \xi(n+1)$）に対して $b_n = a_{\xi(n)}$

1. 実数の完備性

【定理】デデキントの切断公理

$\mathbb{R}$ の切断 (A,B)（$A \cup B = \mathbb{R}$，$A \cap B = \emptyset$，$a < b$）について，A の最大元か B の最小元が存在する．

例：$\sqrt{2}$ が実数であることを保証する

【定理】実数と同値な性質

1. 上に有界な単調増加列は収束する（ボルツァーノ＝ワイエルシュトラスの定理）
2. 有界な数列は収束する部分列を持つ
3. **コーシー列**（$d(a_n, a_m) \to 0$）は収束する

1. 連続性の定義

【定義】連続性（同値な定義）

1. **数列**：$a_n \to x$ なら $f(a_n) \to f(x)$
2. ε-δ：$d(x, y) < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

直感：入力を少しだけ動かせば，出力も少しだけしか動かない

1. 課題

【課題】

1. 次の $n \to \infty$ の極限を求めよ：(a) $a_n = \frac{1}{n}$ (b) $b_n = (-1)^n$ (c) $c_n = 1 + 2 + \ldots + 2^n$
2. $f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ について：(a) 単調増加を示せ (b) $2 < f(n) < 3$ を示せ (c) 収束を示せ
3. ε-δ 論法で $f(x) = 2x$ と $g(x) = x^2$ が $x = 2$ で連続であることを示せ

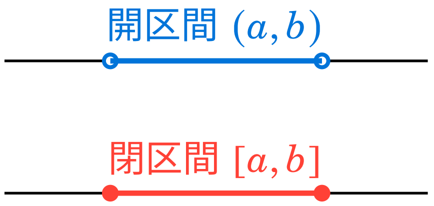
2. 開集合と閉集合

【定義】開近傍・開集合・閉集合

- $B_\varepsilon(x) = \{y : d(x,y) < \varepsilon\}$：$\varepsilon$-**開近傍**
- **開集合**： 任意の $x \in A$ に $B_\delta(x) \subset A$ なる $\delta > 0$ が存在
- **閉集合**： 開集合の補集合

性質：(1) $\mathbb{R}^n, \emptyset$ は開集合 (2) 有限個の共通部分は開集合 (3) 任意個の合併は開集合

注意：無限個の共通部分は開集合とは限らない. 例：$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right) = [0,2]$ (閉集合)



2. 開集合による連続性・課題

【定義】連続性（位相的定義）

f が**連続** $\Longleftrightarrow$ 任意の開集合 V について $f^{-1}(V)$ が開集合

【課題】

1. 無限個の開集合の共通部分が開集合でも閉集合でもない例を示せ
2. $f(x) = x^2$ が $\mathbb{R}$ 上で連続であることを示せ
3. 開集合による連続性と ε-δ 論法の同値性を示せ

3. コンパクト性とワイエルシュトラスの極値定理

【定義】コンパクト

任意の開被覆が有限個の部分被覆を持つ

【定理】ハイネ=ボレル

ユークリッド距離で：コンパクト $\Longleftrightarrow$ 閉かつ有界

例：$[0,1]$ はコンパクト．$(0,1)$ は非コンパクト（$\left\{\left(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right)\right\}$ で有限被覆不可）．$\mathbb{R}$ も非コンパクト

【定理】ワイエルシュトラスの極値定理

コンパクト集合上の連続関数は最大値・最小値を持つ

【課題】

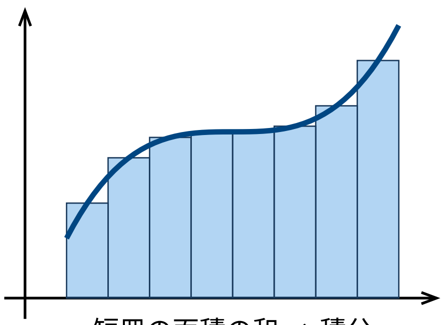
$A=[0,1]$ がコンパクトであることをハイネ=ボレル性で示せ

4. リーマン積分

【定義】リーマン和

$$S = \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)(x_i - x_{i-1})$$

$\Delta \to 0$ の極限が $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$



平均値の定理から：$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

4. 計算公式と課題

1. **基本定理**：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f\,\mathrm{d}z = f(x)$
2. **部分積分**：$\int fG\,\mathrm{d}x + \int Fg\,\mathrm{d}x = [FG]_a^b$
3. **変数変換**：$\int f(g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(u)h'(u)\,\mathrm{d}u$

【課題】

1. $\int_0^a e^{-x}\,\mathrm{d}x$ を計算せよ
2. $\int_0^a e^{-x}x\,\mathrm{d}x$ を計算せよ
3. $\int_0^a xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$を計算せよ
4. $a \to \infty$ の極限を求めよ
5. $\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n}$ を示し $\sum\frac{1}{n} = \infty$ を導け

5. 多重シグマと級数の収束

$\sum_i \sum_j f(i,j)$ は表の全マスの合計 → 有限和なら順序交換自由

	$i=1$	$\cdots$	$i=n$
$j=1$	$f(1,1)$	$\cdots$	$f(n,1)$
$\vdots$	$\vdots$	$f(i,j)$	$\vdots$
$j=m$	$f(1,m)$	$\cdots$	$f(n,m)$

無限和では順序交換不可の場合あり

$1,-1,1,-1,\ldots$ → 発散

1 だけ先に足す → $+\infty$

【定義】絶対収束

$\sum |a_i|$ が収束すれば順序交換 OK

5. 重積分・変数変換

【定理】フビニの定理

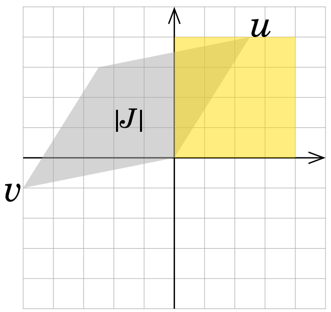
重積分は積分の繰り返しで計算でき，順序不問

変数変換：

$$\int f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int f\big(\varphi(u, v)\big) |J|\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$$

ヤコビアン：

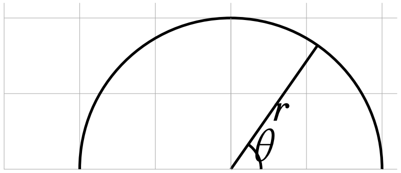
$$J = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_x}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_y}{\partial v} \end{pmatrix}$$



5. ガウス積分と課題

極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ で

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2 = \pi$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

【課題】

1. $\sum_i \sum_j \sum_k ijk$ を書き直せ
2. ジニ係数とローレンツ曲線の関係を $n = 3$ で確認せよ
3. $\int_{-1}^{1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2+y^2+2xy\right)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ を計算せよ

6. 知識の理論

【定義】基本概念

- ω：**状態**，Ω：**状態空間**，部分集合：**事象**
- $\mathscr{F}_i$：人 i の**知識構造**（Ω の分割）
- **知っている**：$F_i(\omega) \subset A$ のとき事象 A を知っている
- **知識関数**：$K_i(A) = \{\omega \in \Omega \mid F_{i(\omega)} \subset A\}$

直感：「A を知っている」＝ 区別がつく範囲がすべて A に含まれる（A の外の可能性を排除できる）

6. 知識の例

天気 $W \in \{0,1\}$，株式 $Z \in \{2,3\}$

$\Omega = \{(0,2),(0,3),(1,2),(1,3)\}$

知識構造 $\{\{(0,2),(0,3)\},\{(1,2),(1,3)\}\}$：

- 天気はわかる，株式はわからない

性質：(1) $K_i(A) \subset A$ (2) 単調性 (3) $K_i(K_i(A)) = K_i(A)$

$W=0$	$W=1$
$(0,2)$	$(1,2)$
$(0,3)$	$(1,3)$

株式は区別不能

6. 相互知識と共有知識

【定義】相互知識・共有知識

- **相互知識**：全員が A を知っている
- **共有知識**：$\mathscr{A}^n = \bigcap_i K_i\left(\mathscr{A}^{n-1}\right)$（$\mathscr{A}^0 = A$）の極限

例：$\mathscr{F}_1 = \{\{1,2,3\},\{4,5,6\}\}$，$\mathscr{F}_2 = \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\}$

$\omega = 1$，$A = \{1,2,3\}$：相互知識だが $K_1(K_2(A)) = \emptyset \to$ **共有知識でない**

ゲーム理論では共有知識が重要：均衡の予測に高階の知識が必要

6．課題

【課題】

1. 知識関数の性質 3 つを証明せよ
2. $\Omega = \{1, ..., 7\}$，$\mathscr{F}_a = \{\{1,2\},\{3\},\{4,5,7\},\{6\}\}$，$\mathscr{F}_b = \{\{1,2,4,5\},\{3,6\},\{7\}\}$ で共有知識となる事象をすべて求めよ
3. **(Muddy children puzzle)** 二人が帽子（赤 or 黒）をかぶる．自分は見えず相手は見える．少なくとも一人が赤． (a) 状態集合 (b) 知識構造 (c) 共有知識 (d)「誰も自分の色がわからない」→ 各人の色は？

7. 確率の定義と確率変数

知識の理論では区別がつかない状態を定式化した．確率論はさらに「どれがどれほど起こりやすいか」を定量化する

【定義】σ-代数と確率

$\mathscr{F}$：σ-代数．確率 P：(1) $P(A) \geq 0$ (2) $P(\Omega) = 1$ (3) 可算加法性

【定義】確率変数

$X : \Omega \to Z$．分布関数 $G(b) = P(X \leq b)$，密度 g，期待値 $E[X] = \int xg(x)\,\mathrm{d}x$

- **同時分布** $g(x, y)$，**周辺分布** $g_X(x) = \int g(x, y)\,\mathrm{d}y$，**独立**：$g(x, y) = g_X(x)g_Y(y)$

7. 条件付き確率とベイズ更新

【定義】ベイズ更新

$$P(\omega|A) = \begin{cases} \frac{P(\omega)}{P(A)} & \text{if}\, \omega \in A \\ 0 & \text{if}\, \omega \notin A \end{cases}$$

直感：A が確定すれば A 外の確率は 0．A 内の比率を保ったまま合計を 1 に再調整

条件付き密度：$g(x \mid y) = \frac{g(x,y)}{\int g(x',y)}\,\mathrm{d}x'$

繰り返し期待値の法則：$E[E[X \mid Y]] = E[X]$

【課題】

1. $\mathrm{Var}[X] = E\left[X^2\right] - (E[X])^2$ を示せ
2. $\mathrm{Var}[aX + bY] = a^2\,\mathrm{Var}[X] + 2ab\,\mathrm{Cov}[X, Y] + b^2\,\mathrm{Var}[Y]$ を示せ
3. 独立なら $\mathrm{Cov}[X, Y] = 0$ を示せ
4. 繰り返し期待値の法則を証明せよ

7. 正規分布のベイズ更新

$Y = X + N$（独立），$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$N \sim N(0, \gamma^2)$

$g_X(x) g_N(y - x)$ の指数部を平方完成：

$X | Y = y$ は正規分布：

- 平均 $\frac{\gamma^2 \mu + \sigma^2 y}{\gamma^2 + \sigma^2}$（$y$ に引き寄せられる）
- 分散 $\frac{\gamma^2 \sigma^2}{\gamma^2 + \sigma^2}$（小さくなる＝情報増加）

8. チェビシェフの不等式と大数の弱法則

【定理】チェビシェフの不等式

$P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$

$X_1, X_2, \ldots$：独立，平均 μ，分散 σ^2．$\overline{X}_n = \frac{\sum X_i}{n} \to \mathrm{Var}\left(\overline{X}_n\right) = \frac{\sigma^2}{n}$

大数の弱法則：$P\left(|\overline{X}_n - \mu| \geq \varepsilon\right) \to 0$

コンドルセの陪審定理：陪審員が十分多く独立なら判決は確率 1 で正しい

【課題】

各 X_i の平均・分散が異なる場合に拡張せよ

9. 電子メールゲーム（設定）

状態 X（確率 $\frac{2}{3}$）

	L	R
U	$1, 1$	$0.1, -2$
D	$-2, 0.1$	$0, 0$

状態 Y（確率 $\frac{1}{3}$）

	L	R
U	$0, 0$	$0.1, -2$
D	$-2, 0.1$	$1, 1$

- A 氏だけが状態を知る．Y のときのみ自動送信．確率 $1 - \varepsilon$ で届く

9. 電子メールゲーム（分析）

メール 0 通（B 氏）：$P(X) = \frac{2}{2+\varepsilon} > \frac{2}{3}$ → X の可能性が高い → **L** が最適

返信 0 通（A 氏）：B 氏に未着の確率 $\frac{1}{2-\varepsilon} > \frac{1}{2}$ → B 氏は L を選ぶ → **U** が最適

帰納的に繰り返し：メールが途絶えた側は常に「相手に届いていない」確率が $\frac{1}{2}$ 超 → **何回メールが飛んでも (U,L) のみ均衡**

知識構造：

$$\mathscr{F}_A = \{\{(X,0,0)\},\{(Y,0,0),(Y,0,1)\},\{(Y,1,1),(Y,1,2)\},\ldots\}$$

Y が「ほぼ共有知識」でも完全な共有知識でない限り (D,R) は実現しない

10. 同意定理

【定理】オーマンの同意定理（簡易版）

事前共通信念 p のもとで $p_A(\omega) = q_A$，$p_B(\omega) = q_B$ が**共有知識**なら $q_A = q_B$

決闘の例：A 勝利確率 p について

- A 申込に $p > \frac{2}{3}$，B 申込に $p < \frac{1}{3}$ が必要 → 信念一致なら決闘は起きない

【課題】

1. 電子メールゲームの共有知識を求めよ
2. $\mathscr{F}_A = \{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}, \mathscr{F}_B = \{\{1\},\{2,3\},\{4\}\}, p = (0.1, 0.3, 0.4, 0.2)$ で $\tilde{p}_A \neq \tilde{p}_B$ が共有知識になり得るか
3. 2 はオーマンの同意定理に反するか？理由を述べよ

11．オークション理論

【定義】封印入札オークション

n 人，評価値 $v_i \sim F$（$[0,1]$上，独立）．**第 1 価格**：落札額=最高入札額．**第 2 価格**：落札額=2 番目

第 2 価格：$s = v$ が最適（正直に入札）

落札額は他人の入札額で決まる → 入札額を下げても支払いは変わらない → 勝率だけ下がる

第 1 価格：$b(v) < v$（入札を控える）

自分の入札額＝支払額なので，勝てる範囲で下げたい

微分方程式 $\frac{f(v)}{F(v)}(v - b(v)) = b'(v)$

11. 収入同値定理と課題

【定理】収入同値定理

第 1 価格と第 2 価格の期待収入は一致：$\int_0^1 vf(v)(1-F(v))\,\mathrm{d}v$

一般に (1) 最高評価値が落札 (2) 評価値 0 なら支払いなし → どの方式でも収入同一

【課題】

1. $F(v)=v$，$n=2$ で第 1 価格の入札戦略を計算せよ（数式処理ソフト可）
2. 部分積分で $\int_0^1\left(\int_0^{v_1} v_2 f(v_2)\,\mathrm{d}v_2\right)f(v_1)\,\mathrm{d}v_1 = \int_0^1 vf(v)(1-F(v))\,\mathrm{d}v$ を示せ

まとめ

前半：解析学の道具

- 距離・収束・連続性
- 開集合・閉集合・位相
- コンパクト性と極値定理
- リーマン積分・重積分
- フビニの定理・変数変換
- 級数の収束と絶対収束

後半：確率とゲーム理論

- 知識構造・共有知識
- 確率変数・条件付き確率
- ベイズ更新・畳み込み
- 大数の弱法則
- 電子メールゲーム・同意定理
- オークション・収入同値定理