中級経済数学 1

講義スライド

動学システム ・ 動的計画法 ・ 固有値分解 ・ ペロン＝フロベニウスの定理

多鹿 智哉（日本大学 経済学部）

0. 講義について

テーマ：動学システムとそのマクロ経済学・確率論への応用
方針：厳密さよりは直観と豊富なトピックに触れること

1. オリエンテーション，数列と極限
2. 動学システム，不動点と安定性
3. 動学最適化問題
4. 動的計画法の実践
5. 最適停止問題 1
6. 最適停止問題 2
7. 動的計画法の最適性 1
8. 動的計画法の最適性 2
9. 多変数の動学システム
10. 行列の復習 1
11. 行列の復習 2
12. 行列の復習 3
13. 固有値分解 1
14. 固有値分解 2
15. ペロン・フロベニウスの定理

1. 動学システム

【定義】動学システム (dynamic system)

数列 $(a_t)_t$ と関数 f の組で，

$$a_t = f(a_{t-1})$$

と決まるもの． f を**遷移関数**と呼ぶ． $a_t - a_{t-1} = f(a_{t-1})$ と書けば**差分方程式**．

1. 例：蜘蛛の巣過程・ソロー成長モデル

蜘蛛の巣過程：需要 D・供給 S に対し $D(p_t) = S(p_{t-1})$

$$p_t = D^{-1}(S(p_{t-1}))$$

価格の動学システム．需給の逆関数と供給関数の合成が遷移関数．

ソロー成長モデル：$Y_t = A \cdot K_t^a$，貯蓄率 s，資本減耗 $1-d$

$$K_t = d \cdot K_{t-1} + s \cdot A \cdot (K_{t-1})^a$$

資本 K と GDP Y は一対一 → 資本の動学から GDP 成長がわかる．

1. 例：ネットワーク外部性 ・ L-system

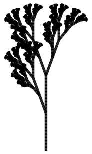
ネットワーク外部性：閾値 s の分布関数 G に対し

$$r_t = G(r_{t-1})$$

登録者割合が r_{t-1} のとき，$s \leq r_{t-1}$ となる人の割合 $G(r_{t-1})$ が翌日の登録者．

L-system (Lindenmayer system)：文字列の書き換え規則で図形を生成．

- F → FF，X → F[+X]F[-X]+X，他はそのまま
- 初期値と変換規則の組が動学システムを定義する



1. 課題

【課題】

この講義ノートに出てきたもの以外に動学システムの例をひとつ挙げ，式を立ててみよう．

2. 不動点と定常状態

【定義】不動点・定常状態

関数 f について $f(x) = x$ となる x を f の**不動点**と呼ぶ．
動学システムで $a = f(a)$ なる a を**定常状態**という． a_0 は**初期値**．

一度 $a_t = a$ に到達すれば $a_{t+1} = f(a) = a$ → そこから動かない．

蜘蛛の巣過程：定常状態 $\overline{p}$ では $D(\overline{p}) = S(\overline{p})$ → **市場均衡価格**

図示：$y = f(x)$ のグラフと $y = x$（45 度線）の交点が不動点．

2. 不動点の安定性

【定義】局所安定・大域安定・不安定

- 初期値が a に十分近ければ $a_t \to a$ → **局所安定**
- 初期値がどこでも $a_t \to a$ → **大域安定**
- 局所安定でない → **不安定**

局所安定性の条件：不動点 a において

$$|f'(a)| < 1$$

が必要十分条件．

蜘蛛の巣過程：$f(p) = D^{-1}(S(p)) \to f'(p) = S'(p)/D'(p)$
安定条件は $|S'(\overline{p})| < |D'(\overline{p})|$

2. 課題

【課題】

1. ソロー・モデルおよびネットワーク外部性のモデル（ただし，$G(x) = x^{a}$とする）の定常状態を求めてみよう．
2. 1 で求めた定常状態はどのような条件のもとで安定になるだろうか?
3. ソロー・モデルにおける定常状態での消費 $(1-s)Y$を最大にする貯蓄率sを計算してみよう（この貯蓄率は黄金律と呼ばれる）．

3. 動学的最適化問題

資産 A を毎年切り崩して消費する問題：

$$\max_{x_1, x_2, \cdots} u(x_1) + \delta \cdot u(x_2) + \delta^2 \cdot u(x_3) + \cdots$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + \cdots = A$$

- $\delta \in (0, 1)$：割引因子（待つことのコスト，人生が終わる確率）
- $0 \leq x_i \leq A$：消費は非負，資産を超えない
- 消費期間は**無限**（変数が無限 → ラグランジュ乗数法は使えない）

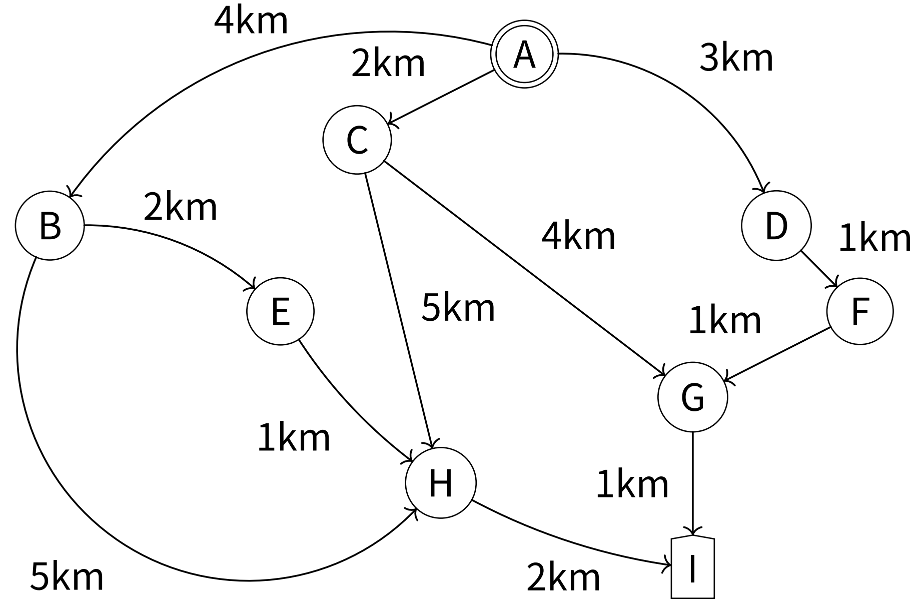
3．動的計画法の発想：最短経路問題

A → I の最短経路を求める問題

動的計画法の発想：

1. **ゴールから逆算**する
2. 各地点から I までの最短距離を計算し記録
3. 計算済みの地点は消去 → 計算量を削減

この「逆算」の発想を動学最適化に応用する．



3. ベルマン方程式

【定義】ベルマン方程式・価値関数

達成できる効用の最大値を資産 A の関数 $W(A)$ とすると：

$$W(A) = \max_x \left[u(x) + \delta \cdot W(A - x) \right]$$

この W を**価値関数**，この等式を**ベルマン方程式**と呼ぶ．

- 元の無限変数問題を**再帰的**な 1 変数問題に帰着（**ベルマンの最適性原理**）
- 関数の定義の中にその関数自身が含まれる → **再帰的**

最短経路との対応：状態 A = 地点，$u(x)$ = 距離，$W(A-x)$ = 残り最短距離

3. 最適貯蓄問題 ($u(x) = \ln x$)

ベルマン方程式：$W(A) = \max_y \left[\ln(A-y) + \delta W(y)\right]$

推測と確認 (guess and verify)：$W(y) = \beta \ln(\alpha y)$ と推測

一階条件 $\frac{1}{A-y} = \delta \frac{\beta}{y}$ → 最適貯蓄 $y^* = \frac{\delta\beta}{1+\delta\beta} A$

ベルマン方程式に代入し，$\ln A$ の係数を比較：

$$\beta = \delta\beta + 1 \quad \Longrightarrow \quad \beta = \frac{1}{1-\delta}$$

最適貯蓄 $y = \delta A$，最適消費 $x = (1-\delta)A$

推測の出所：$W_0 = 0$ から始めて反復 → $\beta \ln(\alpha A)$ の形が現れる．

3. 課題

【課題】

$u(x) = x^{\frac{1}{2}}$のとき，最適貯蓄問題を解いてみよう．

4. 最適停止問題

【定義】最適停止問題

「いつやめるべきか」を考える問題．

サーチ問題（職探し）：毎日 1 件のオファー（$w_t \in [0, 1]$ 一様分布），一度断ると戻れない．

バンディット問題：スロットマシンの故障の有無が不明．チャレンジで情報を得る．

4. サーチ問題

賃金 w を提示されたときの価値：

$$V(w) = \max\left\{w, \quad \delta \int_0^1 V(w')\,\mathrm{d}w'\right\}$$

留保賃金 $\overline{w}$（これ以上なら受諾）を用いると：

$$V(w) = \begin{cases} w & \text{if}\, w > \overline{w} \\ \delta \int_0^1 V(w')\,\mathrm{d}w' & \text{if}\, w \leq \overline{w} \end{cases}$$

$\int_0^1 V(w')\,\mathrm{d}w' = \overline{w}^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \overline{w}^2\right) = \frac{1}{2} + \overline{w}^2$ を代入：

$$\overline{w} = \frac{\delta}{2}\left(1 + \overline{w}^2\right)$$

この二次方程式を解けば留保賃金が求まる．

4. バンディット問題

t 回ハズレ後の故障確率（ベイズ更新）：

$$p_t = \frac{(1-q)\cdot p_{t-1}}{(1-q)\cdot p_{t-1} + (1-p_{t-1})}$$

あたりが出たときの価値：$V^* = \frac{1}{1-\delta}(1000q - 100)$

ベルマン方程式：

$$V_t = \max\{p_t V^* + (1-p_t)\delta V_{t+1} - 100, \quad 0\}$$

$p_{T+1}V^* - 100 < 0$ となる最小の T がやめどき．
$V_{T+1} = 0$ から逆算して V_t を順次計算．

4. 課題

【課題】

1. 現実の問題で最適停止問題と考えられるものにはどのようなものがあるだろうか？一つ例を挙げ，(1)何が時間とともに変化し，(2)何を決めるのか答えなさい．
2. サーチ問題で，オファーされた賃金をキープしたまま職探しを続けることができた場合，職探しをやめる基準はどのように変化するだろうか？計算しなさい．

5．ベルマンの最適性原理（一般形）

一般化された問題：

$$V(x) = \max_{(x_t)} \left[u(x_0, x_1) + \sum_{t=1}^{\infty} \delta^t u(x_t, x_{t+1}) \right] \quad \text{s.t.} x_{t+1} \in G(x_t), x_0 = x$$

最適列 (x_t^*) に対して：

$$V(x_t^*) = u\left(x_t^*, x_{t+1}^*\right) + \delta \cdot V\left(x_{t+1}^*\right)$$

ベルマン方程式 $W(x) = \max_{y \in G(x)} \left\{ u(x, y) + \delta W(y) \right\}$ の解は $W = V$.

（証明：W を展開し $\delta^{n+1} W(x_{n+1}) \to 0$ を使う）

5. バナッハの不動点定理

【定義】縮小写像

汎関数 Φ が $d(\Phi[f], \Phi[g]) < \rho \cdot d(f,g)$（$\rho \in (0,1)$）を満たすとき．

【定理】バナッハの不動点定理

Φ が縮小写像 $\Longrightarrow \Phi[f] = f$ となる f が**ただ一つ**存在する．

構成：$f_n = \Phi[f_{n-1}]$ として $d(f_n, f_{n-1}) \leq \rho^{n-1} d(f_1, f_0) \to 0$
一意性：不動点が 2 つ (f,g) あれば $d(f,g) = d(\Phi[f], \Phi[g]) \leq \rho d(f,g)$ で矛盾．

5. ベルマン方程式の解の存在

ベルマン方程式の右辺 $\Phi[W](x) = \max_{y\in G(x)}\{u(x,y) + \delta W(y)\}$ について：

- $\Phi[f] \geq \Phi[g]$ if $f \geq g$（単調性）
- $\Phi[W + \alpha] = \Phi[W] + \delta\alpha$（定数シフト）

→ Φ は縮小写像 → バナッハの不動点定理より**解が一意に存在**

価値反復法 (value iteration)：適当な W_0 から $W_{t+1} = \Phi[W_t]$ を反復
→ (W_t) はベルマン方程式の解に収束（コンピュータで数値計算）

5. 課題

【課題】

次のいずれかのひとつの問いに答えなさい．

1. 価値反復法を使って，次のベルマン方程式の解を数値的に求めなさい．

$$W(x) = \max_{y\in[0,1]} \{x(1-y) + 0.9 \times W(y)\}$$

ただし，$x \in [0,1]$である．

2. $|\lambda|$が十分小さいとき，次の関数方程式（線形ヴォルテラ積分方程式）に解が存在することを示しなさい．

$$f(x) = h(x) + \lambda \int_0^x \varphi(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

ただし，$\varphi(x,t)$の定義域は$0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1$であり，$\max_{x,t}\left|\varphi(x,t)\right| < M$となる実数$M < \infty$が存在するとする．

6. 多変数の動学システム

多くの例はベクトルの列 $(\vec{x}_t)$ で，行列 A を用いて

$$\vec{x}_t = A\vec{x}_{t-1}$$

と表される → **線形システム**．t 期先は $\vec{x}_t = A^t\vec{x}_0$．

IS-LM モデル

GDP y・インフレ率 π・利子率 i の 3 変数

マルコフ連鎖

失業・就業・教育の確率的遷移

ネットワーク上の伝播：隣接行列 A を通じてショックが波及

→ A^t の構造を知ることが鍵 → **固有値分解**が必要

6. 課題

【課題】

例で挙げた動学システムをそれぞれ行列で表現しなさい．

7. 線形関数と行列

【定義】線形関数

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ が $f(x+y)=f(x)+f(y)$ かつ $f(\lambda x)=\lambda f(x)$ を満たすとき.

$f(\vec{x})=\sum_{i=1}^{n}x_i f(\vec{e}_i)$ なので n 個のベクトル $f(\vec{e}_1),\dots,f(\vec{e}_n)$ で決まる.
これらを列として並べた行列 A で $f(\vec{x})=A\vec{x}$：

$$A\vec{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\vec{a}_i=\begin{pmatrix}\sum a_{1i}x_i\\ \vdots\\ \sum a_{mi}x_i\end{pmatrix}$$

行列積 AX の (i,j) 成分は $\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_{kj}$. **単位行列**：$I=[\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n]$，$AI=A$.

7. 行列式

【定義】行列式 $\det(A)$

以下の性質で特徴づけ：**分配法則**, **スカラー倍法則**, **交代法則**（列交換で符号反転），**一致退化法則**（同じ列 $\to 0$），**基準化** $\det(I) = 1$.

計算公式：$\det(A) = \sum_{\sigma \in \Sigma^*} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j}$

重要な性質：

- $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ が一次従属 $\iff \det(A) = 0$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

7. クラメールの公式・転置・逆行列

【定義】クラメールの公式

$A\vec{x}=\vec{b}$ の解：$x_i=\dfrac{\det\left(\vec{a}_1,\ldots,\vec{b},\ldots,\vec{a}_n\right)}{\det(A)}$ （i 列を $\vec{b}$ に置換）

転置行列：$\left(A^\top\right)_{ij}=a_{ji}$．$A=A^\top$ なら**対称行列**.

逆行列：$AB=I$ となる $B=A^{-1}$．存在条件は $\det(A)\neq 0$．

LIVE-EVIL の法則：$(AB)^\top=B^\top A^\top$，$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

7. 課題

【課題】

以下のうち，３つ以上に答えてください．

1. $AB \neq BA$となる例を作れ．
2. $AB = 0$となるような $A, B \neq 0$の例を作れ．
3. $A^{-1}A = I$を示せ．
4. LIVE-EVIL の法則を示せ．
5. $AA^{\top}$が対称行列であることを示せ．
6. $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$を示せ．
7. $a_1, \ldots, a_n$が一次従属であれば$\det\left(\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}\right) = 0$となることを示せ．
8. 行列式の交代法則が一致退化法則を意味することを確認しなさい．
9. 一致退化法則と分配法則を用いて行列式は同じベクトルを他の列ベクトルに足しても値が変わらないことを示せ．

8. 固有値・固有ベクトル

【定義】固有値・固有ベクトル

$n \times n$ 行列 A に対し $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ （$\vec{x} \neq 0$）を満たす λ を**固有値**，$\vec{x}$ を**固有ベクトル**.

幾何学的意味：A を作用させても方向が変わらず λ 倍にスケール

固有値の求め方：$(A - \lambda I)\vec{x} = 0$ が非自明解を持つ条件

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \text{(固有多項式)}$$

例：$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \to \lambda^2 - 4 = 0 \to \lambda = \pm 2$

8. 対角化

固有値 $\lambda_1, ..., \lambda_n$ と一次独立な固有ベクトル $\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n$ があれば：

$$A = PDP^{-1}, \quad P = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \dots & \vec{x}_n \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

べき乗の計算：

$$A^t = PD^tP^{-1} = P\begin{pmatrix} \lambda_1^t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^t \end{pmatrix}P^{-1}$$

対角化可能の十分条件：

- 固有値がすべて異なる → 固有ベクトルは一次独立
- A が対称行列 → 常に対角化可能（固有ベクトルは直交）

8. 固有値の性質

$A = PDP^{-1}$ と対角化できるとき：

- **トレース**：$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$
- **行列式**：$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

【定理】対称行列の対角化

対称行列は常に対角化可能．異なる固有値の固有ベクトルは直交する：$\vec{u}^\top \vec{v} = 0$.

【定義】正規直交行列

固有ベクトルが $\|\vec{u}\| = 1$, $\vec{u}^\top \vec{v} = 0$ （$\vec{u} \neq \vec{v}$）を満たすとき $Q = (\vec{u}_1 \ \dots \ \vec{u}_n)$ は正規直交行列：$QQ^\top = I$.

8. 線形システムの収束

$$\vec{x}_{t+1} = A^t\vec{x}_1 = P\begin{pmatrix}\lambda_1^t & 0 \\ 0 & \lambda_2^t\end{pmatrix}P^{-1}\vec{x}_1$$

$P^{-1}\vec{x}_1 = \binom{c_1}{c_2}$ とすれば：

$$\vec{x}_{t+1} = \lambda_1^t c_1 \vec{p}_1 + \lambda_2^t c_2 \vec{p}_2$$

$t \to \infty$ **の挙動は固有値の絶対値で決まる**：

- $|\lambda_i| < 1 \to$ その方向は 0 に収束
- $|\lambda_i| > 1 \to$ その方向は発散

8. ハートマン＝グロブマンの定理

非線形 $\vec{x}_{t+1} = f(\vec{x}_t)$ の不動点 $\vec{x}^*$ 近傍：

$$\vec{x}_{t+1} - \vec{x}^* \approx J_f(\vec{x}^*)(\vec{x}_t - \vec{x}^*)$$

【定義】ヤコビ行列

$$J_f(\vec{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{y}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{y}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\vec{y}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\vec{y}) \end{pmatrix}$$

【定理】ハートマン＝グロブマン

固有値の絶対値 $\neq 1$ なら，不動点近傍の非線形システムの挙動は ヤコビ行列による線形システムと**定性的に同じ**．

8. 課題

【課題】

次のうち，3 つ以上の問いに答えなさい．

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$を対角化しなさい．
2. $\vec{u}$が固有ベクトルであるとき，スカラー$a \in \mathbb{R}$について $a\vec{u}$も固有ベクトルであることを示せ．
3. Aが$A = PDP^{-1}$と対角化できるとき，以下の事実を示せ．
   - PDP^{-1}の(i, i)成分を計算することでAのトレース $\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right)$ は固有値の和に等しいことを示せ．
   - $\det(AB) = \det(A)\det(B)$を利用し，$A$の行列式の値は固有値の積に等しいことを示せ．
4. 正規直交行列Qについて，$QQ^{\top} = I$であることを示せ．
5. $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$が互いに直交する$\vec{0}$でないベクトルであるとき，$\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$が一次独立であることを示せ．
6. 対称行列で固有値が重複する例を作りなさい．

9. ノイマン級数

スカラー：$|a| < 1$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$

【定義】スペクトル半径

$r(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ は } A \text{ の固有値}\}$

ノイマン級数：$r(A) < 1$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty} A^n = (I - A)^{-1}$

9. 非負行列の分類

【定義】非負行列の分類

- $A \geq 0$（**非負**）：全成分 ≥ 0
- $A > 0$：$A \geq 0$ かつ $A \neq 0$
- $A \gg 0$（**正行列**）：全成分 > 0
- **規約 (irreducible)**：$\sum_{m=0}^{\infty} A^m \gg 0$（どの i,j にもある m で $[A^m]_{ij} > 0$）
- **原始的 (primitive)**：ある m で $A^m \gg 0$

$$A \gg 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{原始的} \quad \Longrightarrow \quad \text{規約} \quad \Longrightarrow \quad A \geq 0$$

9. ペロン＝フロベニウスの定理

【定理】ペロン＝フロベニウスの定理

$A \geq 0$ のとき $r(A)$ は A の固有値で，$A\vec{x} = r(A)\vec{x}$，$A^\top \vec{y} = r(A)\vec{y}$ なる非負 $\vec{x}, \vec{y}$ が存在．

規約の場合：

1. $r(A) > 0$，固有ベクトルはスカラー倍を除き一意（**単純固有値**）
2. $\vec{x}, \vec{y} \gg 0$
3. 他の固有値の固有ベクトルは非負にならない

原始的の場合（さらに）：

1. 他の固有値 λ に対し $|\lambda| < r(A)$
2. $\vec{y}^\top \vec{x} = 1$ に基準化すれば $\lim_{m\to\infty} A^m r(A)^{-m} = \vec{x}\vec{y}^\top$

9. スペクトル半径の評価

$A \geq 0$ のとき：

$$\min_j \sum_i a_{ij} \leq r(A) \leq \max_j \sum_i a_{ij}$$

$$\min_i \sum_j a_{ij} \leq r(A) \leq \max_i \sum_j a_{ij}$$

（証明：$\vec{y}^\top A = r(A)\vec{y}^\top$ の各行を足せば $r(A)$ が $\sum_i a_{ij}$ の凸結合とわかる）

ペロン根：$r(A)$ が単純固有値のとき，$r(A)$ を A の**ペロン根**と呼ぶ．

9．応用：産業連関分析

n 部門経済，部門 j の生産関数：$y_j = s_j \ell^{\alpha} \prod_i \left(q_{ij}\right)^{a_{ij}}$

利潤最大化して対数をとると，価格ベクトル $\vec{\rho} = \left(\ln p_j\right)$：

$$\vec{\rho} = A^{\top}\vec{\rho} - \vec{\varepsilon} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\rho} = -\left(I - A^{\top}\right)^{-1}\vec{\varepsilon}$$

$\left(I - A^{\top}\right)^{-1}$ の存在：$\sum_i a_{ij} + \alpha = 1$，$\alpha > 0$ より列和 < 1
$\to$ ペロン＝フロベニウスから $r\left(A^{\top}\right) < 1 \to$ ノイマン級数が収束

$\left(I - A^{\top}\right)^{-1}$ は**レオンチェフ逆行列**と呼ばれる．

9. 応用：マルコフ連鎖

【定義】確率行列（遷移行列）

$P \geq 0$ かつ $\mathbb{1}^\top P = \mathbb{1}^\top$（各列の和が 1）.

【定義】定常分布

$\vec{x} = P\vec{x}$ を満たす確率分布 $\vec{x}$.

ペロン＝フロベニウスからの帰結：

1. P, Q が確率行列 $\Longrightarrow PQ$ も確率行列
2. $r(P) = 1$（列和がすべて 1 なので）
3. **定常分布が存在**する（$r(P) = 1$ の固有ベクトルを正規化）
4. P が原始的なら定常分布は**一意**

9. ホーキンス＝サイモンの条件

【定義】首座小行列・H-S 条件

行列の左上から $k \times k$ を取り出した部分行列が首座小行列．
すべての首座小行列の行列式が正 → **H-S 条件**．

B の対角成分以外が負のとき，以下は同値：

- H-S 条件
- **弱可解性**：$\forall \vec{c} \in \mathbb{R}^n_+$ に対し $B\vec{x} = \vec{c}$ が $\vec{x} \in \mathbb{R}^n_{++}$ の解を持つ
- **強可解性**：$\forall \vec{c} \in \mathbb{R}^n_+$ に対し $B\vec{x} = \vec{c}$ が $\vec{x} \in \mathbb{R}^n_+$ の解を持つ

$B(\rho) = \rho I - A$ $(A \geq 0)$ に適用し，フロベニウス根 $\lambda(A) = \inf M$ を定義 → ペロン＝フロベニウスの証明

まとめ

前半：1 変数の動学

- 動学システムと遷移関数
- 不動点と安定性条件 $|f'(a)| < 1$
- ベルマン方程式と動的計画法
- 最適停止問題（サーチ・バンディット）
- バナッハの不動点定理 → 解の存在
- 価値反復法

後半：多変数の動学

- 線形システム $\vec{x}_t = A\vec{x}_{t-1}$
- 行列式・逆行列・クラメールの公式
- 固有値分解と対角化 $A = PDP^{-1}$
- ハートマン＝グロブマンの定理
- ペロン＝フロベニウスの定理
- 応用：産業連関・マルコフ連鎖